

# 1.4.1 充分条件与必要条件

广州市第八十六中学 柯桂宏

## 一、内容和内容解析

### 1.内容

充分条件、必要条件，充分条件与判定定理、必要条件与性质定理的关系.

### 2.内容解析

充分条件、必要条件和充要条件是数学中常用的三个常用逻辑用语.本节课学习充分条件和必要条件.

由于中学数学很多命题都可以写成“若 $p$ ，则 $q$ ”的形式，分析命题的条件 $p$ 与命题的结论 $q$ 的关系，判断命题的真假，我们可以得到充分条件和必要条件.“若 $p$ ，则 $q$ ”是真命题，即 $p \Rightarrow q$ ，则 $p$ 是 $q$ 的充分条件， $q$ 是 $p$ 的必要条件. $p$ 是 $q$ 的充分条件，即 $p$ 成立，则 $q$ 一定成立，也就是说要使 $q$ 成立，只要具备条件 $p$ 就足够了. $q$ 是 $p$ 的必要条件，即 $q$ 不成立，则 $p$ 一定不成立，所以 $q$ 成立是 $p$ 成立必不可少的条件.

在数学知识体系中，每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件，每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件.运用充分条件、必要条件进行数学表达、论证，可以提高交流的严谨性和准确性.

本节课的教学重点是：充分条件、必要条件的意义.

## 二、目标和目标解析

### 1. 目标

- (1) 理解充分条件的意义，理解判定定理与充分条件的关系；
- (2) 理解必要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系；
- (3) 初步运用充分条件、必要条件进行数学表达、论证和交流，提升逻辑推理素养.

### 2. 目标解析

达成上述目标的标志是：

(1) 通过梳理典型的数学命题，知道“命题真假”“条件和结论之间关系”“充分条件”三者之间的关系，能将判断“ $p$ 是 $q$ 的充分条件”的问题转化为判断命题“若 $p$ ，则 $q$ ”的真假问题，能说明充分条件的意义；知道判定定理与充分条件的联系，能举例说明每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件.

(2) 通过梳理典型的数学命题，知道“命题真假”“条件和结论之间关系”“必要条件”三者之间的关系，能将判断“ $p$ 是 $q$ 的必要条件”的问题转化为判断命题“若 $q$ ，则 $p$ ”的真假问题，能说明必要条件的意义；知道性质定理与必要条件的联系，能举例说明每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件.

(3) 通过使用充分条件、必要条件表达数学对象、进行数学推理，体会充分条件、必要条件在表达数学内容和论证数学结论中的作用，提升交流的逻辑性和准确性，逐步提升逻辑推理素养.

## 三、教学问题诊断分析

在初中，学生已经学习过许多数学命题，也见过不少“若 $p$ ，则 $q$ ”形式的平面几何命题，初步具备分清命题的条件和结论、判断命题的真假的认知基础.“若 $p$ ，则 $q$ ”是真命题，即 $p \Rightarrow q$ ，那么 $p$ 是 $q$ 的充分条件， $q$ 是 $p$ 的必要条件.由 $p \Rightarrow q$ ，就说“命题的条件”是“命题的结论”的充分条件，这与学生的已有推理经验相符合，所以学生容易理解.但由 $p \Rightarrow q$ ，则称 $q$ 是 $p$ 的必要条件，也就是说“命题的结论”是“命题的条件”的必要条件，学生认为 $q$ 是 $p$ 推出的结论，怎么又变成了条件呢？而且在判断“ $p$ 是 $q$ 的必要条

件”时，需要判断命题“若 $q$ ，则 $p$ ”的真假，学生也存在认知障碍。因此学生在判断必要条件时对命题的条件和结论容易混淆。

本节课的教学难点是：对必要条件的理解。

#### 四、教学过程设计

##### 1. 概念的引入

**问题 1:** 在初中，我们学习了命题。什么是命题？命题的一般形式是什么？

师生活动：学生回答，教师指明命题的一般形式。

学生：用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题。判断为真的语句是真命题，判断为假的语句是假命题。

教师：中学数学中的许多命题可以写成“若 $p$ ，则 $q$ ”“如果 $p$ ，那么 $q$ ”等形式。其中 $p$ 为命题的条件， $q$ 为命题的结论。

设计意图：复习命题知识，明确命题的一般形式，为学习充分条件和必要条件做准备。

##### 2. 概念的形成

**问题 2:** (教科书第 17 页思考) 下列“若 $p$ ，则 $q$ ”形式的命题中，哪些是真命题？哪些是假命题？

(1) 若平行四边形的对角线互相垂直，则这个平行四边形是菱形；

(2) 若两个三角形的周长相等，则这两个三角形全等；

(3) 若 $x^2 - 4x + 3 = 0$ ，则 $x = 1$ ；

(4) 若平面内两条直线 $a$ 与 $b$ 均垂直于直线 $l$ ，则 $a // b$ 。

师生活动：学生判断命题的真假，教师确认(1)(4)为真命题，(2)(3)为假命题，并引导学生说明理由。

根据“若 $p$ ，则 $q$ ”形式的命题的真假，教师给出充分条件、必要条件的定义：

“若 $p$ ，则 $q$ ”为真命题，是指由条件 $p$ 通过推理可以得出 $q$ 。这时，我们就说，由 $p$ 可以推出 $q$ ，记作 $p \Rightarrow q$ ，并且说， $p$ 是 $q$ 的充分条件， $q$ 是 $p$ 的必要条件。

如果“若 $p$ ，则 $q$ ”为假命题，那么由条件 $p$ 不能推出结论 $q$ ，记作 $p \not\Rightarrow q$ 。此时，我们就说， $p$ 不是 $q$ 的充分条件， $q$ 不是 $p$ 的必要条件。

设计意图：通过判断“若 $p$ ，则 $q$ ”形式的命题的真假，建构充分条件和必要条件的定义。

##### 3. 概念的理解

**问题 3:** 在问题 2 的 4 个命题中，能判断充分条件、必要条件吗？

设计意图：通过教科书中的例子，理解充分条件和必要条件的意义。

##### 4. 概念的深化

**例 1** (教科书第 18 页例 1) 下列“若 $p$ ，则 $q$ ”形式的命题中，哪些命题中的 $p$ 是 $q$ 的充分条件？

(1) 若四边形的两组对角分别相等，则这个四边形是平行四边形；

(2) 若两个三角形的三边成比例，则这两个三角形相似；

(3) 若四边形为菱形，则这个四边形的对角线互相垂直；

(4) 若 $x^2 = 1$ ，则 $x = 1$ ；

(5) 若 $a = b$ ，则 $ac = bc$ ；

(6) 若 $x, y$ 为无理数，则 $xy$ 为无理数。

师生活动：学生讨论上述命题的真假，教师启发、补充，并用以下问题进行追问。

**问题 4:** 例 1 中命题(1)给出了“四边形是平行四边形”的一个充分条件，还有其他充分条件吗？

“四边形的两组对角分别相等”“四边形的两组对边分别相等”“四边形的一组对边平行

且相等”“四边形的两条对角线互相平分”都是“四边形是平行四边形”的充分条件.

$p$  是  $q$  的充分条件, 是指由条件  $p$  可以推出结论  $q$ .

对于给定的结论  $q$ , 使得  $q$  成立的条件  $p$  是不唯一的.

**问题 5:** 如何判断  $p$  是  $q$  的充分条件?

设计意图: 在判断具体命题的真假性中理解充分条件的概念; 通过追问, 理解判定定理与充分条件的关系, 认识使结论  $q$  成立的条件  $p$  是不唯一的, 掌握判断充分条件的方法, 发展学生的逻辑推理素养.

例 2. 下列“若  $p$ , 则  $q$ ”形式的命题中, 哪些命题中的  $q$  是  $p$  的必要条件?

(1) 若四边形是平行四边形, 则这个四边形的两组对角分别相等;

(2) 若两个三角形相似, 则这两个三角形的三边成比例;

(3) 若四边形的对角线互相垂直, 则这个四边形为菱形;

(4) 若  $x=1$ , 则  $x^2=1$ ;

(5) 若  $ac=bc$ , 则  $a=b$ ;

(6) 若  $xy$  为无理数, 则  $x, y$  为无理数.

师生活动: 学生思考、讨论, 教师启发、补充, 规范作答, 并用以下问题进行追问.

**问题 6:** 例 2 中命题 (1) 给出了“四边形是平行四边形”的一个必要条件, 还有其他必要条件? 你能给出“四边形是平行四边形”的其他必要条件吗?

“四边形的两组对角分别相等”“四边形的两组对边分别相等”“四边形的一组对边平行且相等”“四边形的两条对角线互相平分”都是“四边形是平行四边形”的必要条件.

$q$  是  $p$  的必要条件, 是指由  $p$  可以推出  $q$ .

由条件  $p$  推出的结论  $q$  是不唯一的.

**问题 7:** 如何判断  $q$  是  $p$  的必要条件?

设计意图: 通过例题分析, 理解必要条件的概念; 通过追问, 理解性质定理与必要条件的关系, 认识由条件  $p$  推出的结论  $q$  是不唯一的, 掌握判断必要条件的的方法, 发展学生的逻辑推理素养.

**问题 8:** 还有其它方法判断充分条件和必要条件?

探究: 已知  $A = \{x | x \text{ 满足条件 } p\}$ ,  $B = \{x | x \text{ 满足条件 } q\}$ ,

(1) 如果  $A \subseteq B$ , 那么  $p$  是  $q$  的什么条件?

(2) 如果  $B \subseteq A$ , 那么  $p$  是  $q$  的什么条件?

设计意图: 通过探究集合包含关系和充分条件、必要条件的联系, 能够从集合的角度去理解充分条件和必要条件.

5. 课堂小结

**问题 9:** 如何判断  $p$  是  $q$  的充分条件?  $q$  是  $p$  的必要条件?

1. 判断命题“若  $p$ , 则  $q$ ”的真假.

2. 从集合的角度判断.

**问题 10:** 判定定理与充分条件有何关系? 性质定理与必要条件有何关系?

每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件;

每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件.

设计意图: 梳理本节课的知识和方法, 提高学生的数学表达能力和思维能力, 发展抽象概括素养.

6. 布置作业

教科书第 20 页练习第 1, 2, 3 题, 第 22 页习题第 2 题.

**五、目标检测设计**

1. 下列“若  $p$ , 则  $q$ ”形式的命题中, 哪些命题中的  $p$  是  $q$  的充分条件?

(1) 若  $a = b$ , 则  $|a| = |b|$ ;

(2) 两条直线被同一条直线所截, 若同位角相等, 则这两条直线平行;

设计意图: 检测学生对充分条件的理解, 同时也加加强理解判定定理和充分条件的联系.

2. 下列“若  $p$ , 则  $q$ ”形式的命题中, 哪些命题中的  $q$  是  $p$  的必要条件?

(1) 若四边形是菱形, 则这个四边形两条对角线垂直且相等;

(2) 若  $ac^2 > bc^2$ , 则  $a > b$

设计意图: 检测学生对必要条件的理解, 同时也加加强理解性质定理和充分条件的联系, 并发展学生的推理素养.