高一-人教A版-数学-必修第一册-第五章

5.5.1　两角差的余弦公式（第一课时）

广州市第四中学　蔡睿

广州教育

一、学习目标

1. 经历探索两角差余弦公式的过程，培养数学抽象、逻辑推理、直观想象素养.
2. 熟记两角差的余弦公式的形式及符号特征，并能利用公式进行简单的化简、求值，培养数学运算、数学建模素养.

二、问题引入

如何计算$\cos 15^\circ$？ → $\cos\left(45^\circ-30^\circ\right)$

$\cos\left(60^\circ-45^\circ\right)$

如何求 $\cos(\alpha-\beta)$ ？

有同学说，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$

你觉得成立吗？？

可以代入特殊角试试看

左边$=\cos(60^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

右边$=\cos 60^\circ-\cos 30^\circ=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

∴左边≠右边

二、问题引入

问题一般化：

知两角α，β的三角函数$\cos\alpha,\cos\beta,\sin\alpha,\sin\beta$

如何求两角差$\alpha-\beta$的余弦值？

思路：

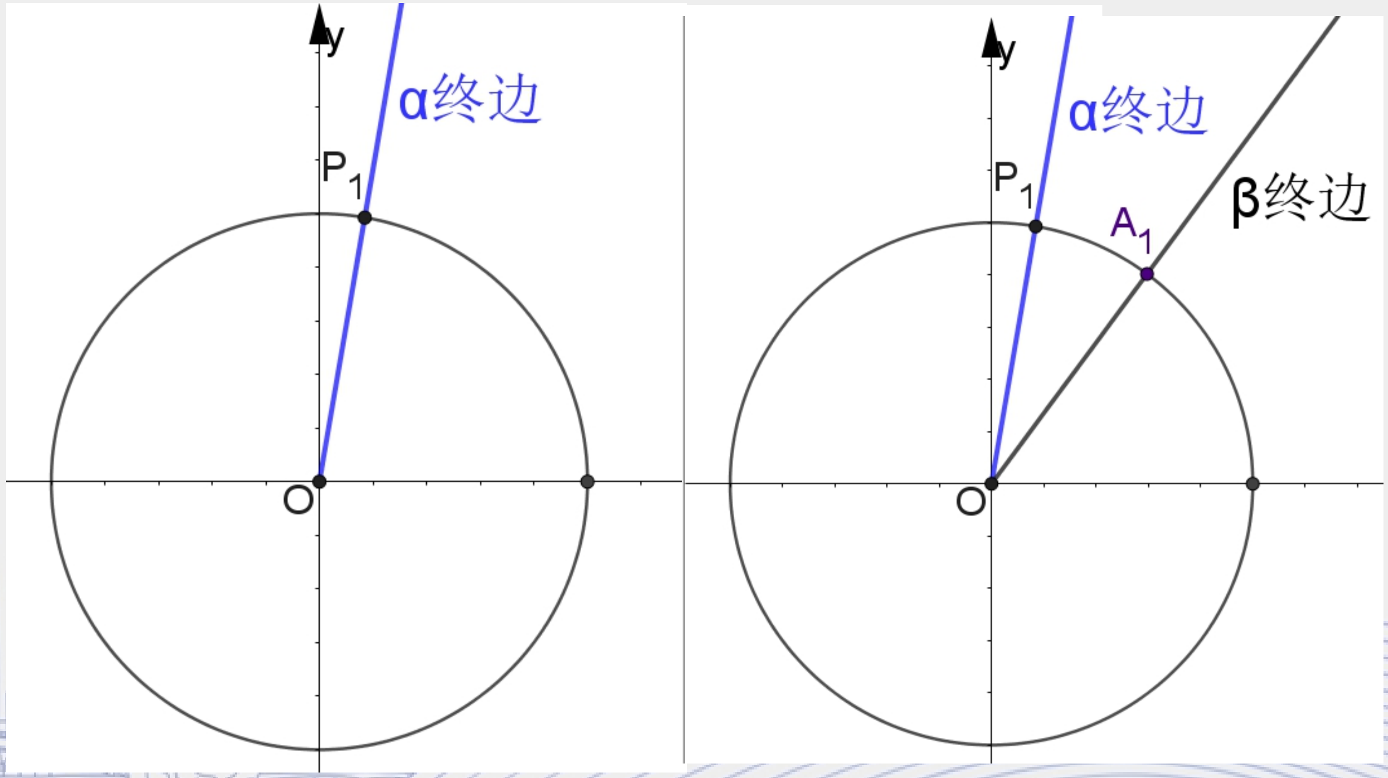
考虑三角函数定义 → 画出单位圆和角的终边 →(数形结合) 找等量关系式

三、新知探究——公式推导

α，β为任意角，假设α，β终边不相同. 由三角函数定义，

点$(\cos\alpha,\sin\alpha)$为角α终边与单位圆交点，设为点P_1

点$(\cos\beta,\sin\beta)$为角β终边与单位圆交点，设为点A_1



三、新知探究——公式推导

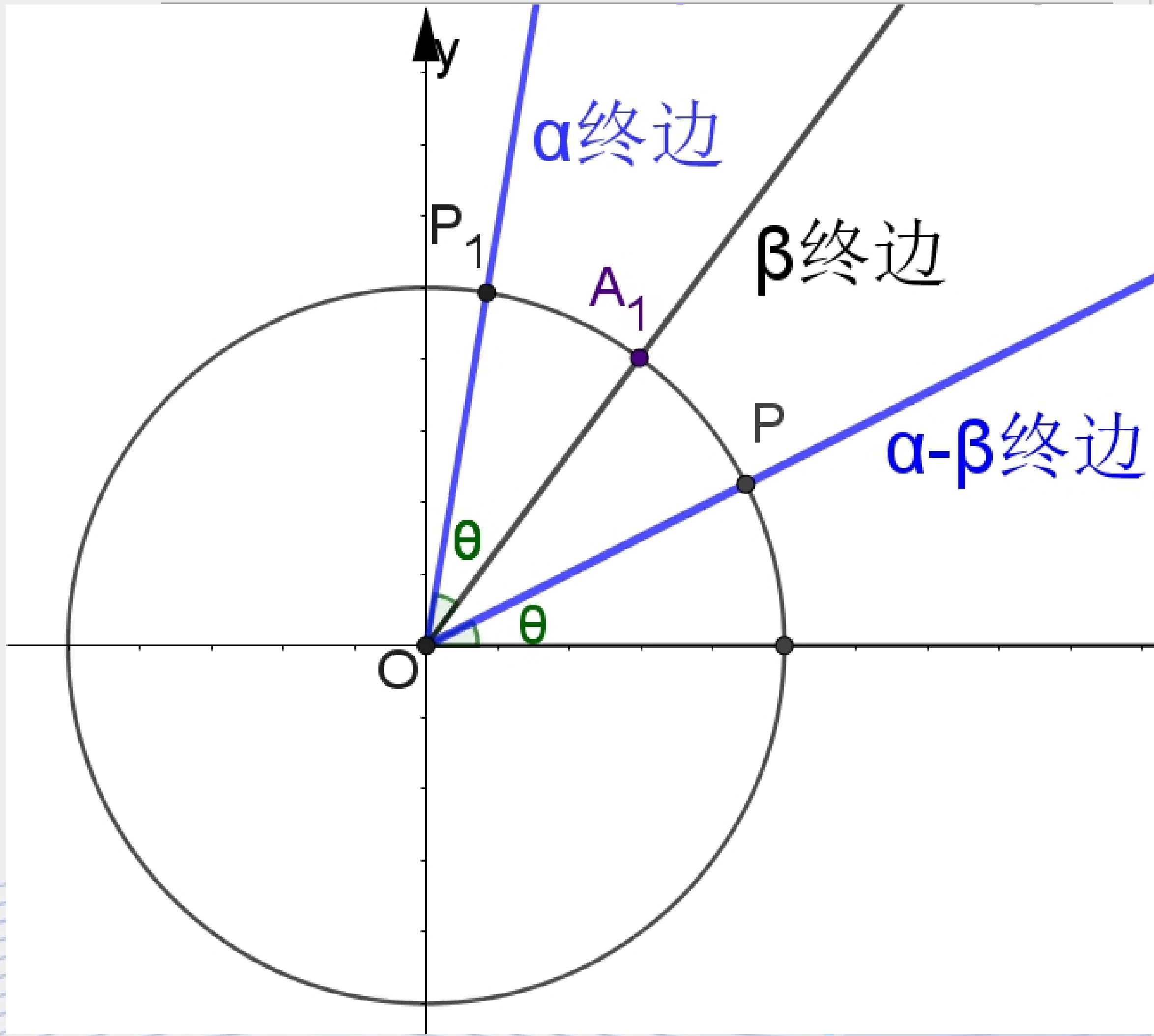
问题1： 角α-β的终边如何确定？

设$\angle P_1OA_1$为θ，由任意角的定义得：

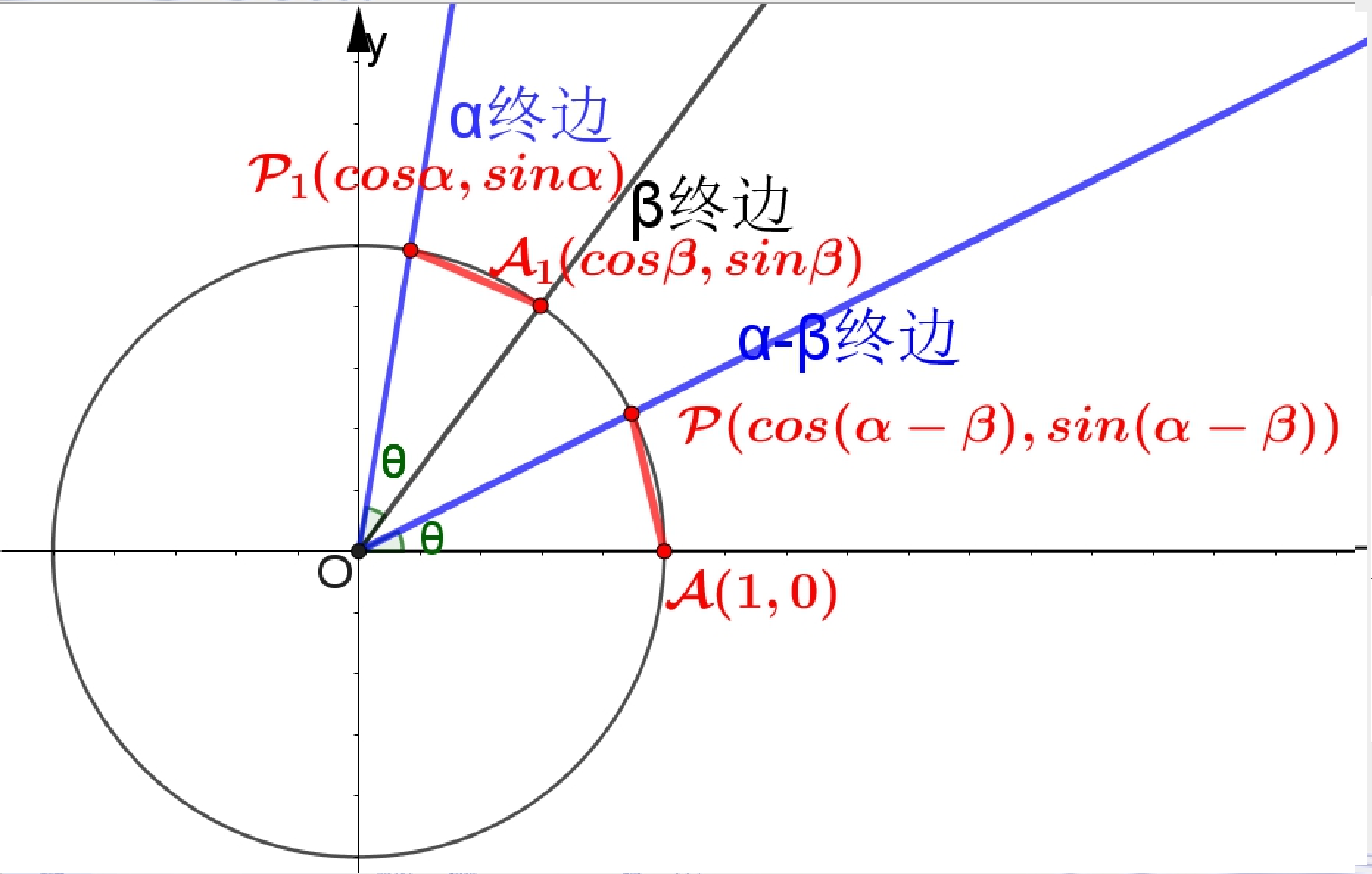
$$\alpha=\beta+\theta+2k\pi,k\in Z$$

移项得

$$\alpha-\beta=\theta+2k\pi,k\in Z$$



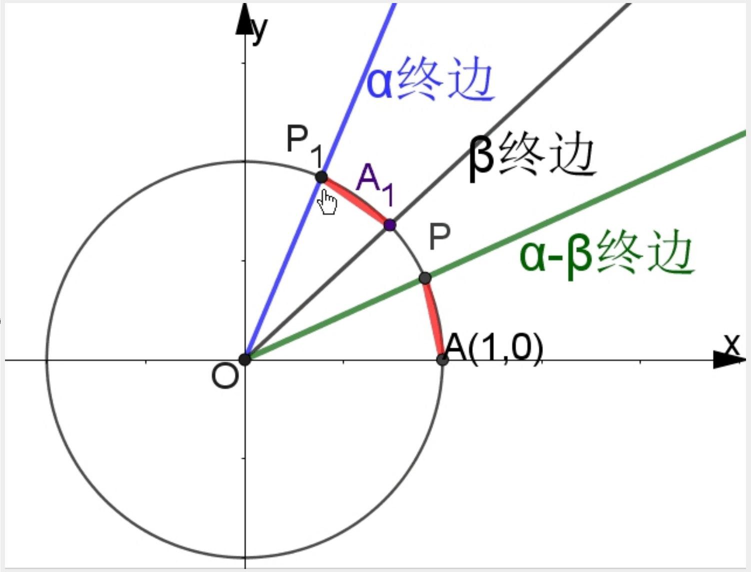
角的终边确定后，可知如图所示点的坐标



由圆的对称性可知

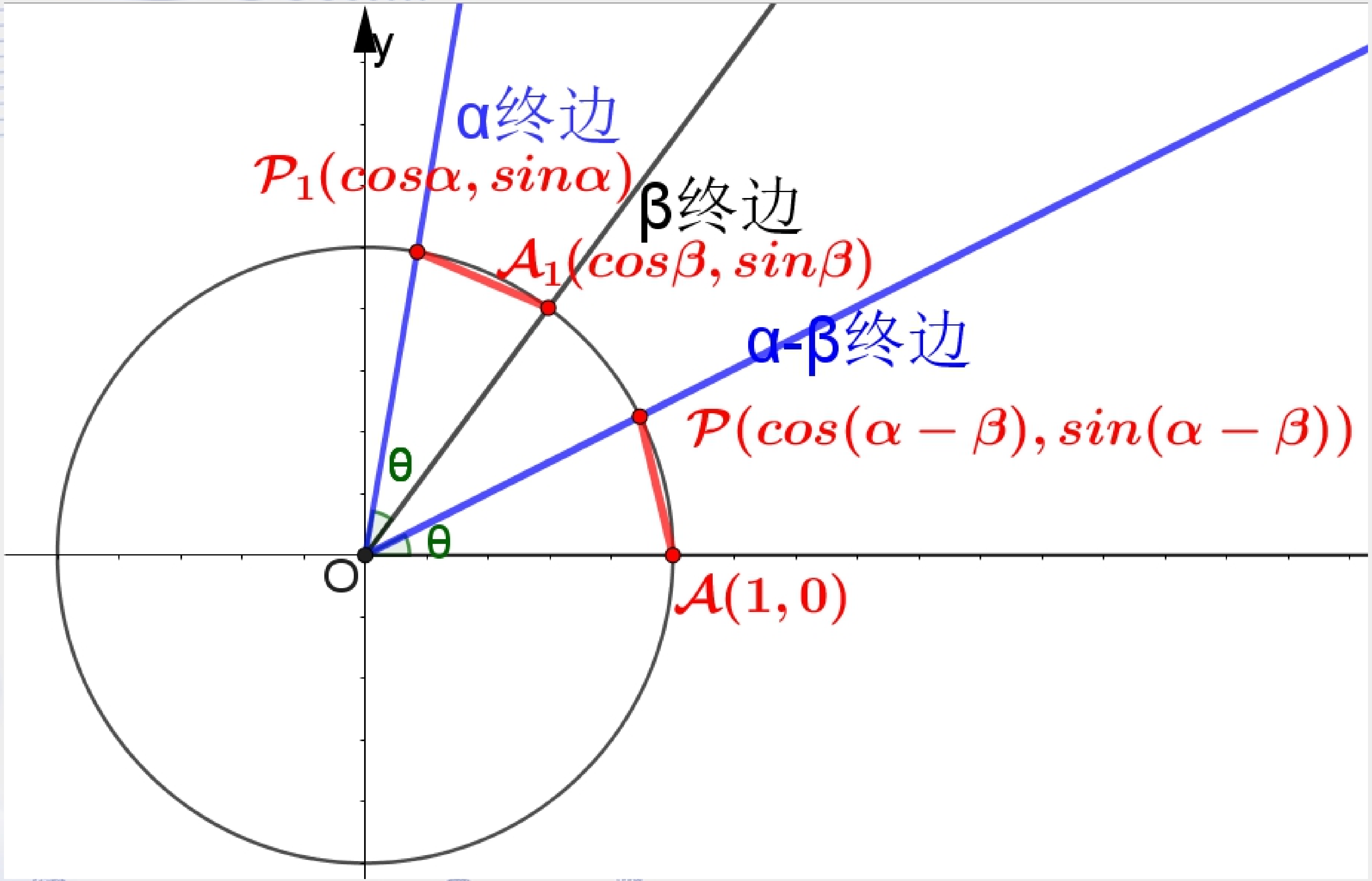
θ 所对的弦相等：

$$PA = P_1A_1$$



无论角 α,β 终边在什么位置，$PA = P_1A_1$ 都成立

问题2：仔细观察图形，有何等量关系？

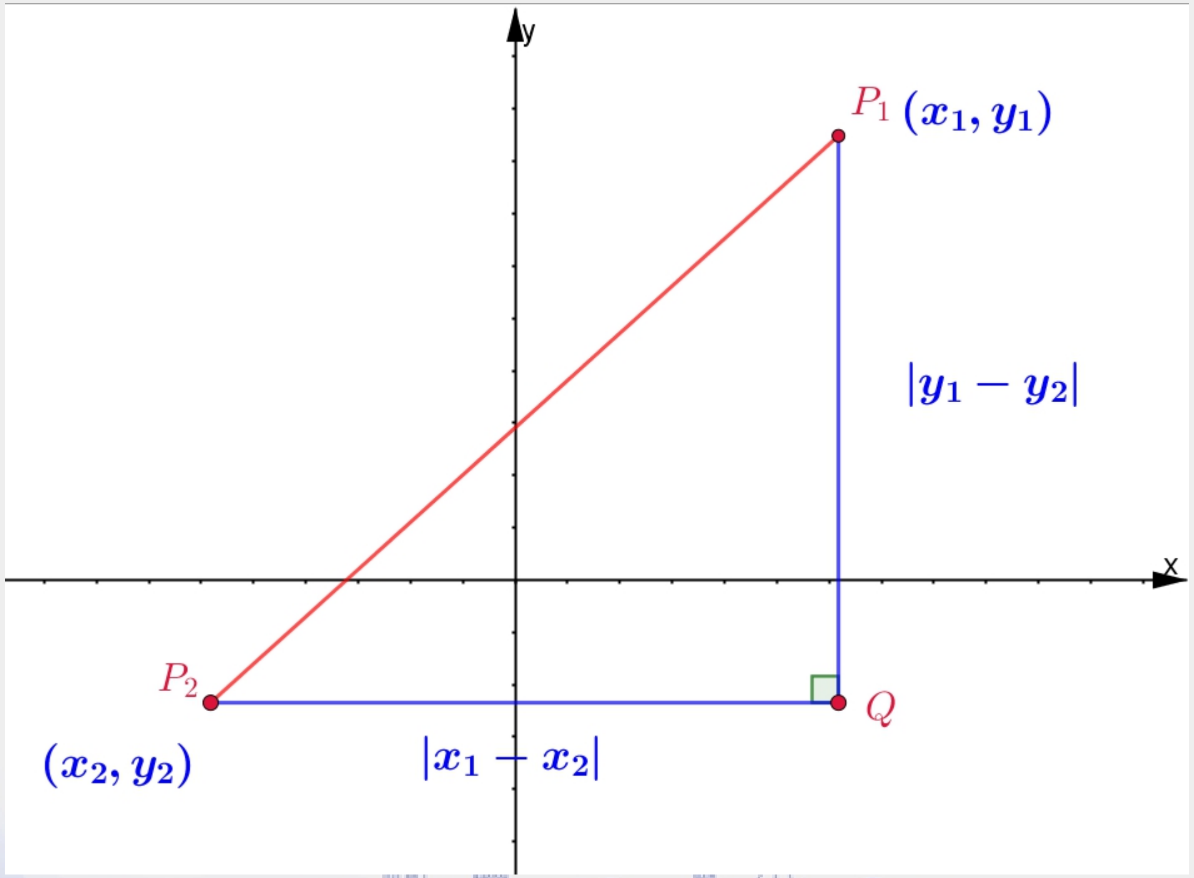


问题3：如何代数表示 $PA = P_1A_1$？

两点距离公式

共享课堂

两点距离公式：已知平面直角坐标系任意两点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，则点 P_1,P_2 之间的距离为:



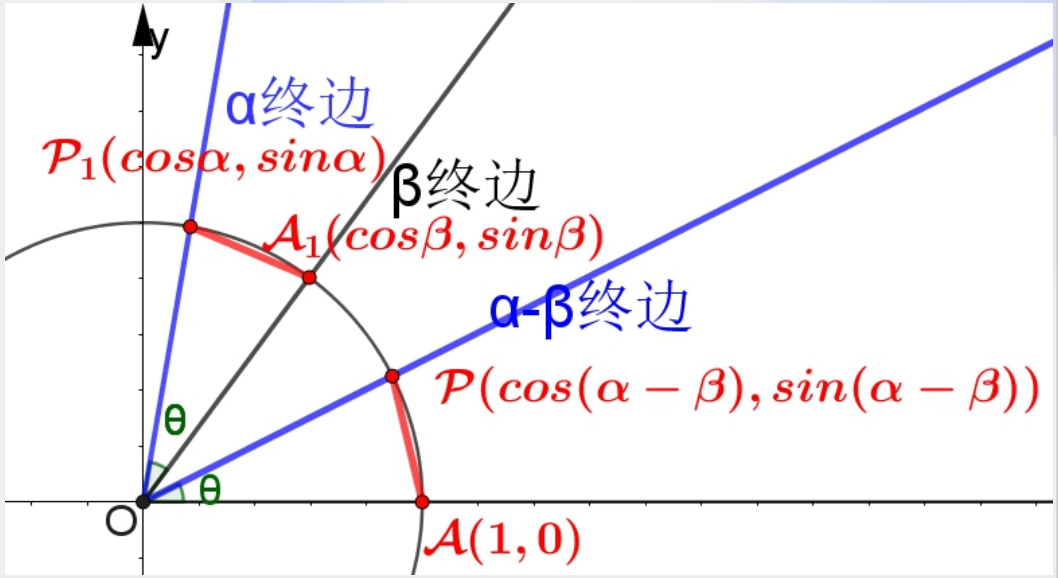
$$P_1P_2^{\ 2} = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

广州教育

共享课堂

两点距离公式：$P_1P_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$



问题4：借助以上“两点间的距离公式”，结合 $PA=P_1A_1$,你能得到什么结论？

$$\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2}$$

平方得：$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2$

完全平方拆开得：$\boxed{\cos^2\alpha}-2\cos\alpha\cos\beta+\boxed{\cos^2\beta}+\boxed{\sin^2\alpha}-2\sin\alpha\sin\beta+\boxed{\sin^2\beta}$

$$=\boxed{\cos^2(\alpha-\beta)}-2\cos(\alpha-\beta)+1+\boxed{\sin^2(\alpha-\beta)}$$

化简得：$2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=2-2\cos(\alpha-\beta)$

化简得：$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$

广州教育

共享课堂

整理得：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

当α,β终边相同时，上式是否成立？

代入验证如下：$\because\alpha,\beta$终边相同　$\therefore\alpha=\beta+2k\pi,k\in Z$

$\therefore$左边$=\cos(\alpha-\beta)=\cos(2k\pi)=\cos0=1$

$\therefore$右边$=\cos(\beta+2k\pi)\cos\beta+\sin(\beta+2k\pi)\sin\beta$

$=\cos\beta\cos\beta+\sin\beta\sin\beta$

$=1$

$\therefore$左边=右边

$\therefore$当α，β终边相同时，也满足公式

广州教育

三、新知探究——问题解决

对于任意角α,β 有$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
此公式给出了任意角α,β的正弦、余弦与其差角 $\alpha-\beta$ 的余弦之间的关系，称为差角的余弦公式，简记作$C_{(\alpha-\beta)}$

问题5　如何计算$\cos15^{\circ}$?

三、新知探究——问题解决

问题5　如何计算$\cos 15^\circ$？

解：（1）（解法一）$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2};$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

三、新知探究——问题解决

问题5　如何计算 $\cos 15^\circ$？

（解法二）$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

；

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

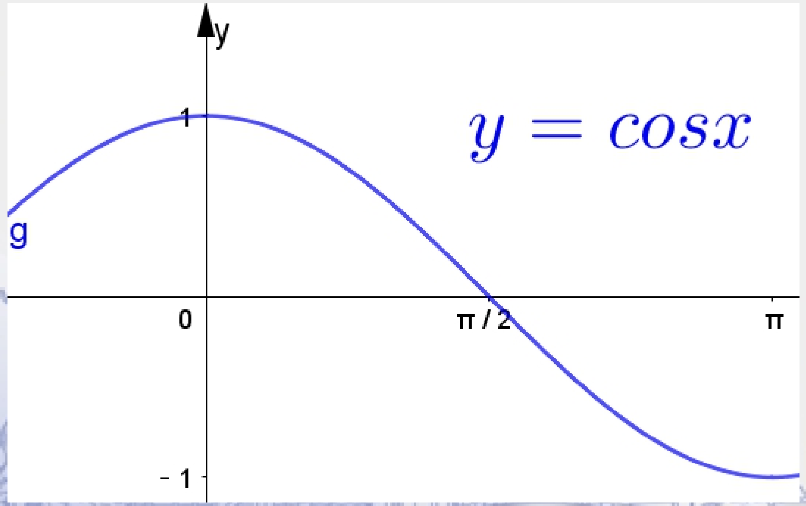
四、典型例题

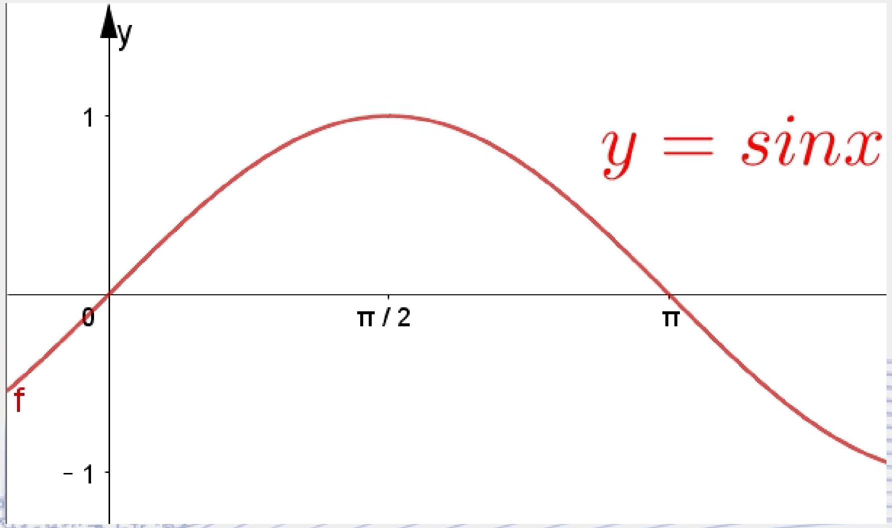
例 1　利用公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 证明：

(1) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$；　(2) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

证明：(1) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0+1\times\sin\alpha$

$=\sin\alpha$.

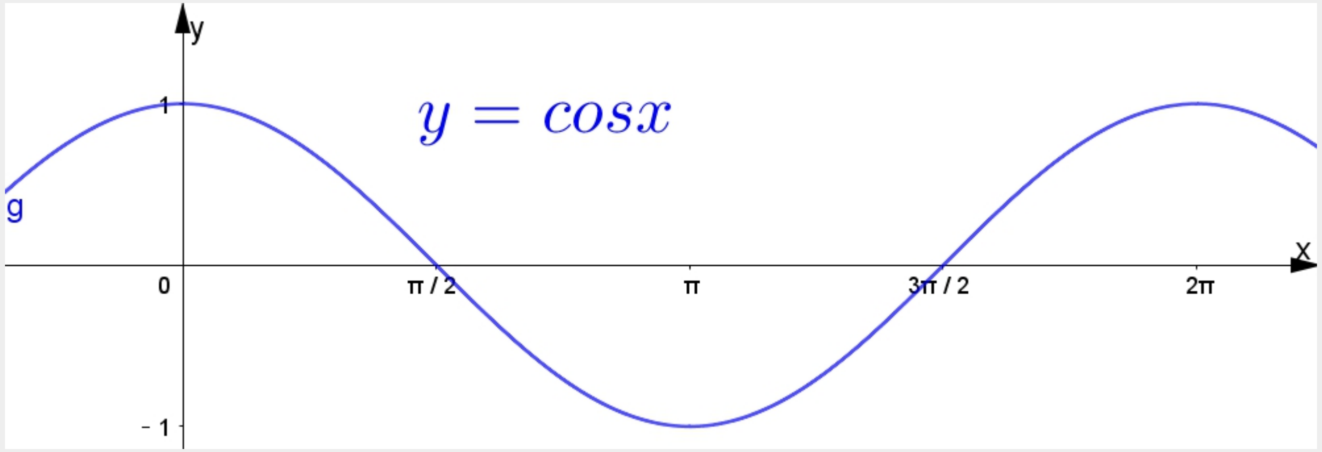


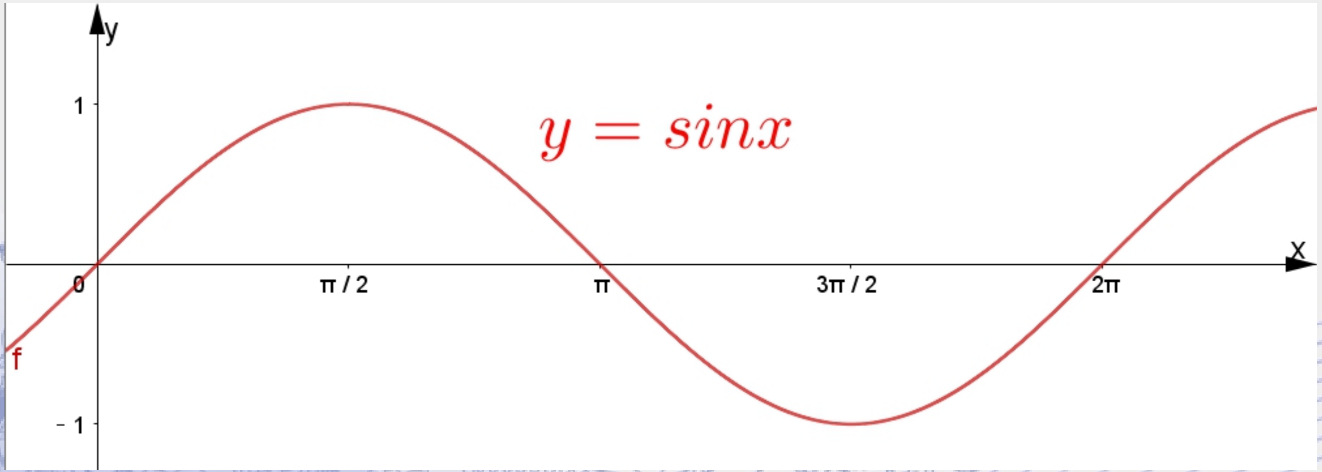


四、典型例题

(2) $\cos(\pi-\alpha)=\cos\pi\cos\alpha+\sin\pi\sin\alpha=(-1)\times\cos\alpha+0$

$=-\cos\alpha$





诱导公式是两角差的
余弦公式的特殊化

共享课堂

例 2 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$，$\beta$ 是第三象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

解：因为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，故 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，

因为 β 是第三象限角，故 $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\dfrac{12}{13}$，

$$\cos(\alpha-\beta)=\overset{?}{\boxed{\cos\alpha}}\cos\beta+\sin\alpha\overset{?}{\boxed{\sin\beta}}.\quad =?\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\times ?$$

$$=-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{33}{65}.$$

广州教育

共享课堂

变式：求值 $\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ$

解：原式 $= \cos\left(72^\circ - 12^\circ\right) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

广州教育

共享课堂

例 3　已知 $\cos(\boxed{\frac{\pi}{4}+\alpha})=\frac{3}{5}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求 $\cos\boxed{\alpha}$ 的值.

产生联系？？

看成一个已知角

拆成两个已知角的差

$$\alpha=\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{\pi}{4}$$

差角的余弦公式

$$\cos[(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\frac{\pi}{4}]=\underbrace{\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}_{\text{已知}}\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\text{已知}}+\underbrace{\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)}_{\text{可求}}\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\text{已知}}$$

广州教育

共享课堂

解：$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}+\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$，

$\therefore$ 角 $\dfrac{\pi}{4}+\alpha$ 是第一或第二象限角

$\therefore \sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \cos\alpha=\cos[(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)-\dfrac{\pi}{4}]=\cos(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

广州教育

五、归纳总结

1. 公式的推导关键要利用三角函数的定义，运用数形结合、转化与化归的思想；
2. 学习新公式，要注意“字母可变，结构不变”，公式中的角具有“任意性”；
3. 运用新公式，注意学会观察，学会把未知角转化为已知角；
4. 常用角的拆分与组合：看到$\alpha+\beta$，α，β想到凑角$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$等；
5. 已知一个角的正弦(或余弦)值，求该角的余弦(或正弦)值时，要注意该角所在的象限，从而确定该角的三角函数值符号.

六、作业

完成配套的目标检测题

共享课堂

谢谢收看，同学们再见！

广州教育

共享课堂

高一-人教A版-数学-必修第一册-第五章

5.5.1　两角差的余弦公式答疑（第一课时）

广州市第四中学　蔡睿

广州教育

难点

给值求值，关键是“凑角”，

1.已知角α，β为锐角，$\cos\alpha=4/5$，$\cos(\alpha+\beta)=-16/65$，求$\cos\beta$.

思路：未知角表示为已知角：$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$ ，再用两角差余弦公式，注意角范围的讨论.

2.已知$\sin(\alpha+\pi/6)=1/3$，其中$-\pi/2<\alpha<\pi/3$，求$\cos\alpha$.

思路：未知角表示为已知角：$\alpha=(\alpha+\pi/6)-(\pi/6)$，再用两角差余弦公式，注意角范围的讨论.

难点

1.已知角α，β为锐角，$\cos\alpha=4/5$，$\cos(\alpha+\beta)=-16/65$，求$\cos\beta$.

解:因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以$0<\alpha+\beta<\pi$.

由$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{16}{65}$，得$\sin(\alpha+\beta)=\frac{63}{65}$.

又因为$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，所以$\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

所以$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$$=\left(-\frac{16}{65}\right)\times\frac{4}{5}+\frac{63}{65}\times\frac{3}{5}=\frac{5}{13}.$$

难点

2.已知sin(α+π/6)=1/3，其中-π/2 <α<π/3，求cos α.

解：$\because -\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore -\dfrac{\pi}{3}<\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$，

可得$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

因此，

$$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{1}{6}$$

易错点

易错点一：已知一个角的正弦（或余弦），求该角的余弦（或正弦）时，要注意该角所在的象限.从而确定该角的三角函数值符号.

易错点二：计算时，用到特殊角三角函数，记错函数值.

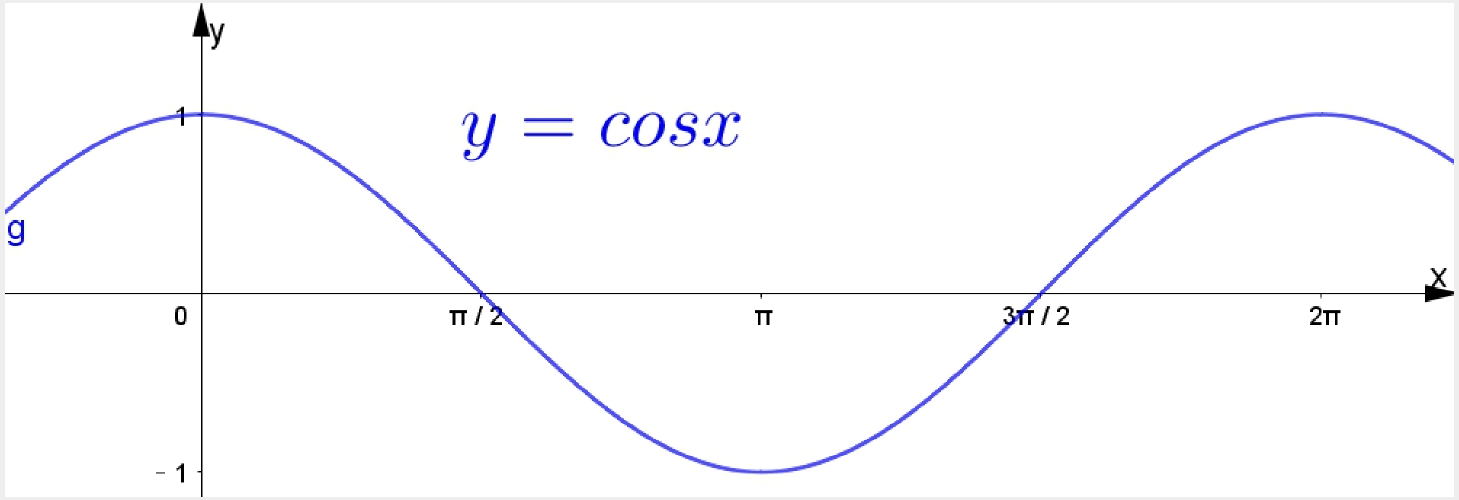
技巧：

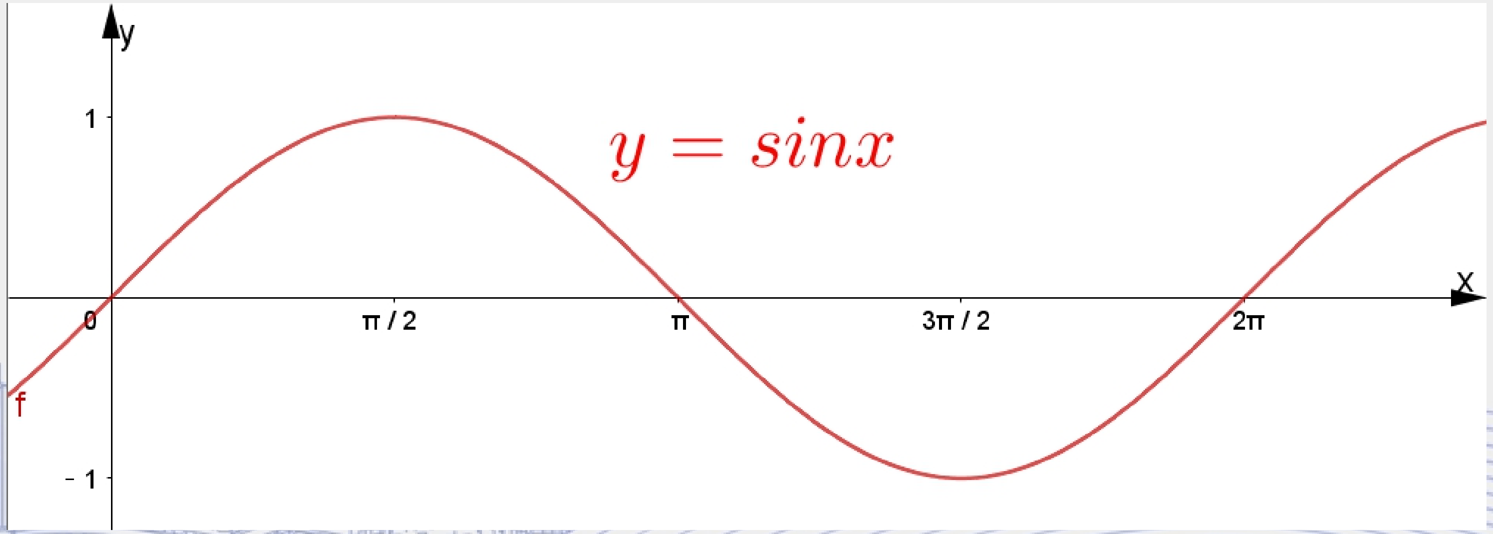
30°，60°，45°的三角函数要画三角形辅助记忆，

0°，90°等终边在坐标轴上的角，要画三角函数图像辅助记忆.

易错点

例如：





谢谢收看，同学们再见！