共享课堂

高一—人教A版—数学—第三章

奇 偶 性

广州市南武中学-陈未来

广州教育

学习目标

1. 理解函数奇偶性的概念.

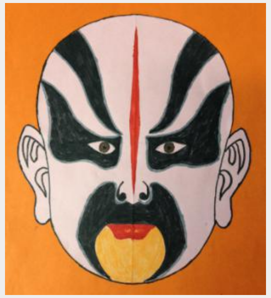
2. 能利用定义判断函数的奇偶性.

3. 感悟由形象到具体,再从具体到一般的研究方法.

情景引入

生活中的“美”

（1）

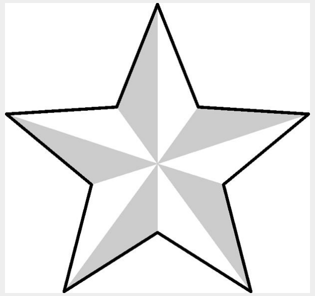


（2）

（3）

轴对称图形

（4）



（5）

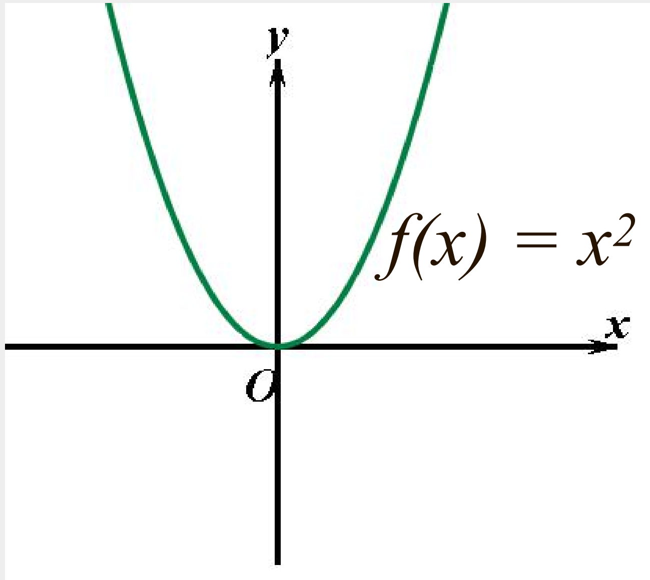
（6）

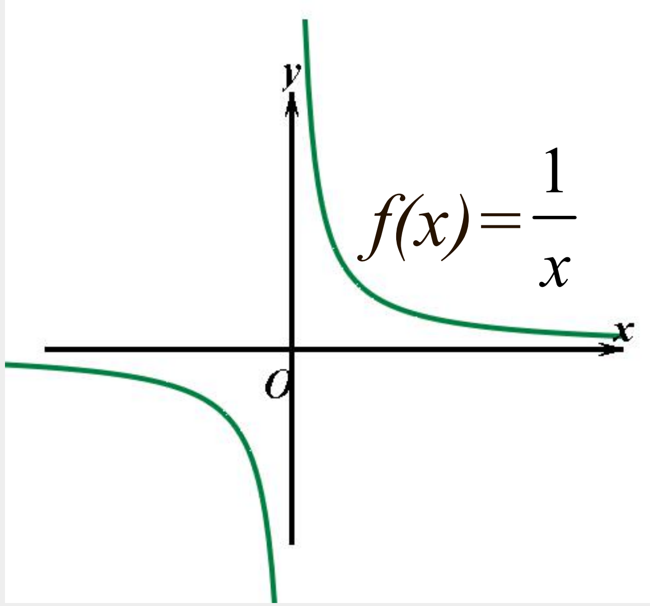
中心对称图形

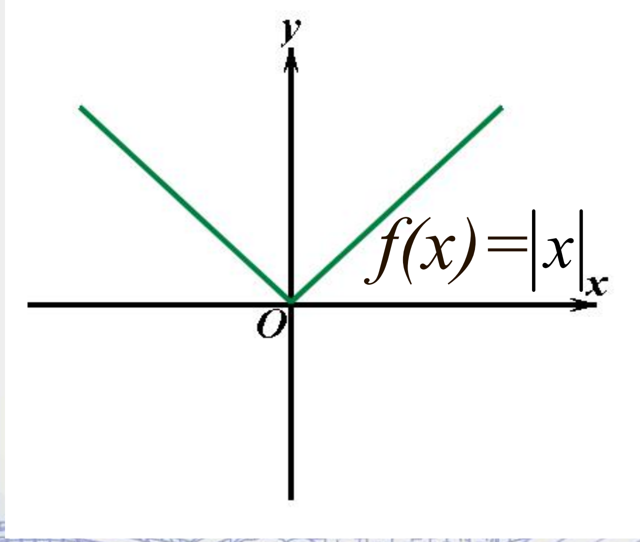
观察上图，回答以下问题：

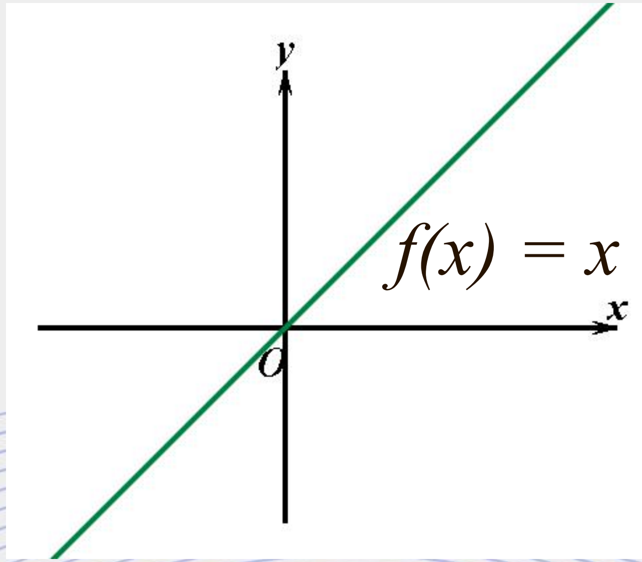
1. 图（1）、（2）、（3）三幅图有什么共同特征吗？
2. 图（4）、（5）、（6）有什么共同特征吗？

函数图象的“美”





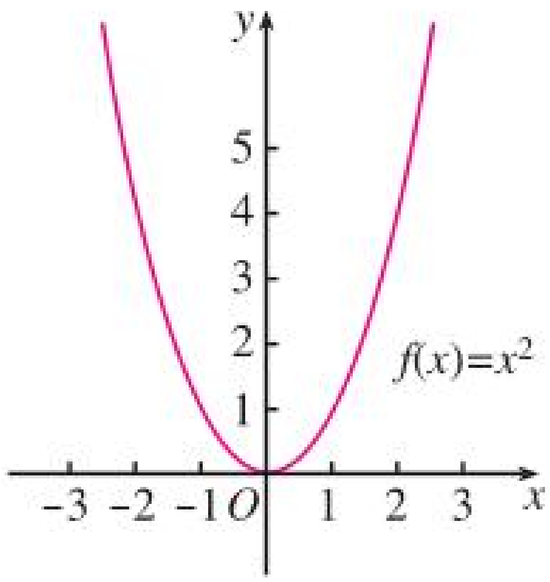


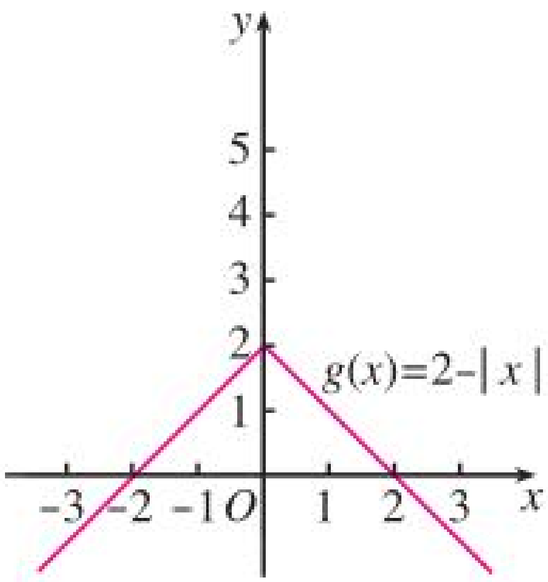


共同探究

画出并观察函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=2-|x|$ 的图象，

你能发现这两个函数有什么共同特征吗？





发现：这两个函数的图象都**关于y轴对称**.

探究

类比函数单调性，你能用符号语言精确地描述“函数图象关于 y 轴对称”这一特征吗？

不妨取自变量的一些特殊值，观察相应的函数值，你能发现什么？

x	…	3	−2	−1	0	1	2	3	…
$f(x)=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$g(x)=2-\|x\|$	…	−1	0	1	2	1	0	−1	…

发现：当自变量取一对相反数时，相应的两个函数值相等.

例：对于函数 $f(x)=x^2$，有 $f(-3)=9=f(3)$；$f(-2)=4=f(2)$；$f(-1)=1=f(1)$

共享课堂

$\forall x \in \mathbf{R}$，都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，这时称函数 $f(x)=x^2$ 为偶函数

请你仿照这个过程，说明函数 $g(x)=2-|x|$ 也是偶函数.

$\forall x \in \mathbf{R}$，都有$g(-x)=2-|-x|=2-|x|=g(x)$，这时称函数 $g(x)=2-|x|$ 为偶函数

广州教育

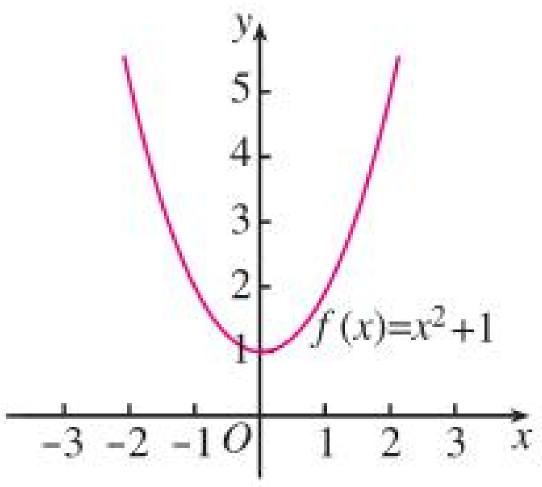
学习新知

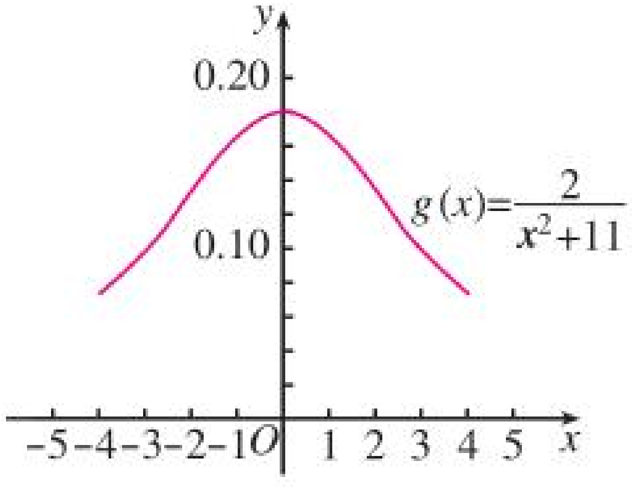
偶函数的定义

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果 $\forall x \in I$，都有 $-x \in I$，且 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做**偶函数**（even function）.

例如，函数$f(x)=x^2+1$，$g(x)=\dfrac{2}{x^2+11}$都是偶函数.

图象





代数特征

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$$

$$g(-x)=\frac{2}{(-x)^2+11}=\frac{2}{x^2+11}=g(x)$$

偶函数的特征

代数特征：$\forall x\in I$，都有$f(-x)=f(x)$恒成立

几何特征：图象关于y轴对称

概念辨析

1. 函数 $f(x)=x^2$，$x\in[-1,2]$ 是偶函数吗？

不是偶函数

2. 对于定义域为 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ ，若 $f(-3)=f(3)$，$f(-5)=f(5)$，则函数 $f(x)$ 一定是偶函数吗?

不一定，仅有限个 $f(-3)=f(3)$，$f(-5)=f(5)$⋯⋯，不足以确定函数是偶函数，不满足“任意性”.

3. 对于定义域为 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，若 $f(-3)\neq f(3)$，则函数 $f(x)$ 一定不是偶函数吗?

不是偶函数，证明不是偶函数，一个反例即可.

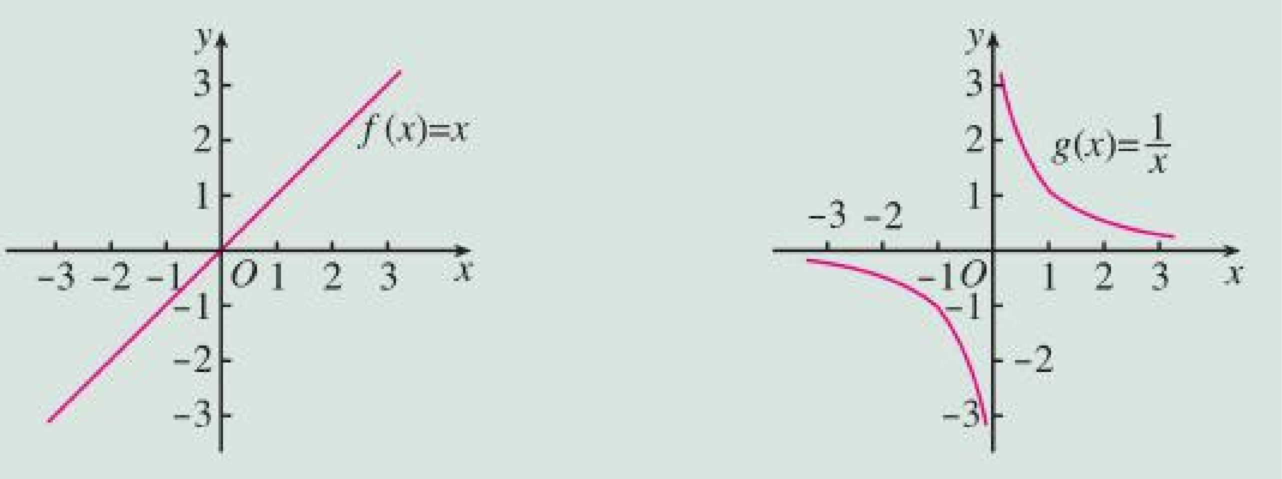
小组合作 自主探究

要求：同学们以小组为单位，按照课本P83页的探究要求，仿照偶函数定义的探究过程，以函数 $f(x)=x$ 和 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 为例，自主探究奇函数的定义.

探究结束后，由学生代表展示探究成果.

小组合作 自主探究

(1)画出并观察函数 $f(x)=x$ 和 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图象，你能发现这两个函数有什么共同特征吗？



(2)填写表格并观察函数特征？

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$f(x)=x$	…								…
$g(x)=\dfrac{1}{x}$	…								…

(3)归纳总结奇函数的定义

奇函数的定义

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果 $\forall x \in I$ ， 都有 $-x \in I$ 且 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数（ odd function ）.

奇函数的特征

代数特征：$\forall x \in I$ ，都有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立

几何特征：图象关于原点成中心对称

新知应用

典例讲解

例1 判断下列函数的奇偶性.

（1） $f(x)=x^4$

（2） $f(x)=x^5$

（3） $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

（4） $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

典例讲解

例1 判断下列函数的奇偶性.

（1） $f(x)=x^4$ （2） $f(x)=x^5$

解：（1）函数 $f(x)=x^4$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $-x\in\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x),$$

所以，函数 $f(x)=x^4$ 为偶函数.

典例讲解

例1 判断下列函数的奇偶性.

（1） $f(x)=x^4$　　（2） $f(x)=x^5$

（2）函数 $f(x)=x^5$ 的定义域为 **R**.

因为 $\forall x \in \mathbf{R}$，都有 $-x \in \mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x),$$

所以，函数 $f(x)=x^5$ 为奇函数.

典例讲解

例1 判断下列函数的奇偶性.

（3）$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$　　（4）$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

（3）函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$.

因为 $\forall x\in\{x\mid x\neq 0\}$，都有 $-x\in\{x\mid x\neq 0\}$，且

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

所以，函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 为奇函数.

典例讲解

例1 判断下列函数的奇偶性.

（3）$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$　　（4）$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

（4）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 0\}$.

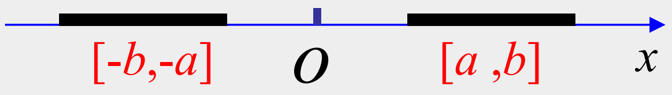
因为 $\forall x\in\{x\,|\,x\neq 0\}$，都有 $-x\in\{x\,|\,x\neq 0\}$，且

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x),$$

所以，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 为偶函数.

对奇函数、偶函数定义的理解注意

(1) 函数具有奇偶性：定义域关于原点对称，对于定义域内的任意一个 x ，则 $-x$ 也一定是定义域内的一个数值.



(2) 若 $f(x)$为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$ 成立　　图象关于原点对称

若 $f(x)$为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$ 成立　　图象关于 y 轴对称

(3) 如果一个函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，那么我们就说函数 $f(x)$ 具有奇偶性.

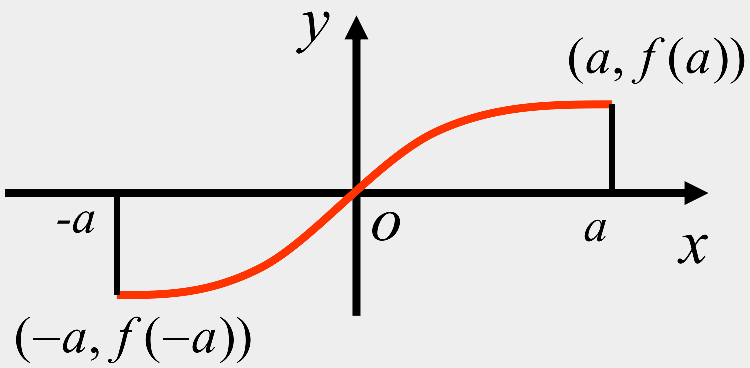
(4) 函数的奇偶性是函数定义域上的整体性质.

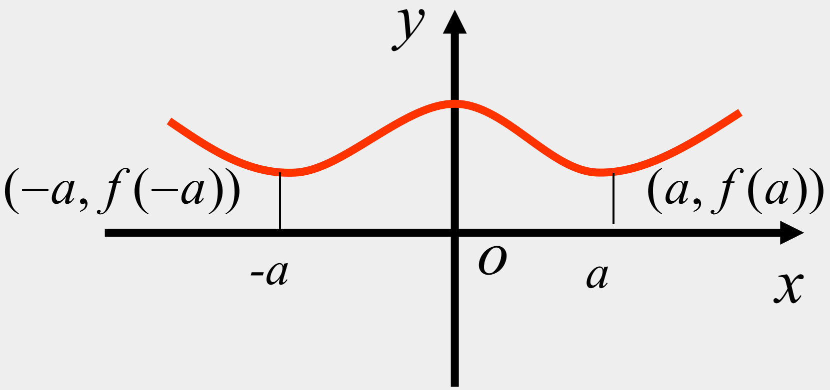
判断或证明函数奇偶性的基本步骤

一看 → 二找 → 三判断

- 一看 → 看定义域 → 是否关于原点对称
- 二找 → 找关系 → $f(x)$ 与 $f(-x)$
- 三判断 → 下结论 → 奇函数或偶函数

课堂小结

<table>
<tr><th>奇偶性</th><th>奇函数</th><th>偶函数</th></tr>
<tr><td rowspan="2">定义</td><td colspan="2">设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，$\forall x\in I$，都有 $-x\in I$.</td></tr>
<tr><td>$f(-x)=-f(x)$</td><td>$f(-x)=f(x)$</td></tr>
<tr><td>图象性质</td><td>

关于原点对称</td><td>

关于y轴对称</td></tr>
<tr><td rowspan="2">判断步骤</td><td colspan="2">定义域是否关于原点对称</td></tr>
<tr><td>$f(-x)=-f(x)$</td><td>$f(-x)=f(x)$</td></tr>
</table>

变式训练

判断下列函数的奇偶性.

（1） $f(x)=\frac{|x|}{x}$

奇函数

（2） $f(x)=(x-1)^2$

既不是奇函数也不是偶函数

（3） $f(x)=2x^4+3x^2(x>0)$

既不是奇函数也不是偶函数

共享课堂

谢谢观看！

广州教育

共享课堂

高一—人教A版—数学—第三章

奇 偶 性

答 疑

广州市南武中学-陈未来

广州教育

易错点一：忽略定义域的对称导致函数奇偶性判断错误

1. 判断下列函数的奇偶性

（1） $f(x)=\dfrac{x^2(x+1)}{x+1}$

（2） $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$

共享课堂

[错解]

（1） $f(x)=\dfrac{x^2(x+1)}{x+1}=x^2$

因为$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

所以，$f(x)$是偶函数

（2） $f(-x)=\dfrac{\sqrt{1-(-x)^2}}{|-x+2|-2}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x-2|-2}$

因为$f(-x)\neq -f(x)$且$f(-x)\neq f(x)$

所以，$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数

[错因分析]要判断函数的奇偶性，必须先求函数定义域(看定义域是否关于原点对称). 有时还需要在定义域制约条件下将$f(x)$进行变形，以利于判定其奇偶性.

广州教育

共享课堂

[正解]（1）由 $x+1\neq 0$ 得 $\{x|x\neq -1\}$

因为 $f(x)$ 定义域不关于原点对称

所以, $f(x)$既不是奇函数也不是偶函数.

（2）由$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\|x+2|-2\neq 0\end{cases}$得 $x\in[-1,0)\cup(0,1]$.

因为$\forall x\in[-1,0)\cup(0,1]$，都有 $-x\in[-1,0)\cup(0,1]$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2-2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

因为$f(-x)=\dfrac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x}=-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-f(x)$

所以, $f(x)$是奇函数.

广州教育

易错点二：忽略奇函数、偶函数的定义域关于原点对称导致错误结果

2. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+1$ 在区间 $[2b-1,3b]$ 上是偶函数，则求 $a+b$ 的值.

[错解] 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，得 $2ax=0$，即 $a=0$

又由 $3b>2b-1$，即 $b>-1$． 所以 $a+b>-1$.

所以 $a+b$ 的值是大于 -1 的一切实数.

[错因分析] 错解忽略了函数的定义域关于原点对称这一条件，即 $2b-1+3b=0$.

[正解] 因为$f(x)$是偶函数，所以$f(-x)=f(x)$，即 $a=0$．

又由 $2b-1+3b=0$ 且$3b>2b-1$

得 $b=\dfrac{1}{5}$

因此 $a+b=\dfrac{1}{5}$

谢谢观看！