



4.2.2 指数函数的图象和性质

广州市育才中学 周莲芳





(一) 创设情境

你能说说研究函数的一般步骤和方法吗？

我们可以类比研究幂函数性质的过程和方法，进一步研究指数函数的性质.首先画出指数函数的图象，然后借助图象研究指数函数的性质.





(二) 探索新知

用描点法作函数

$y = 2^x$ 和 $y = 3^x$ 的图象

1.列表

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = 2^x$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$y = 3^x$	...	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	...

[列表画指数.gsp](#)

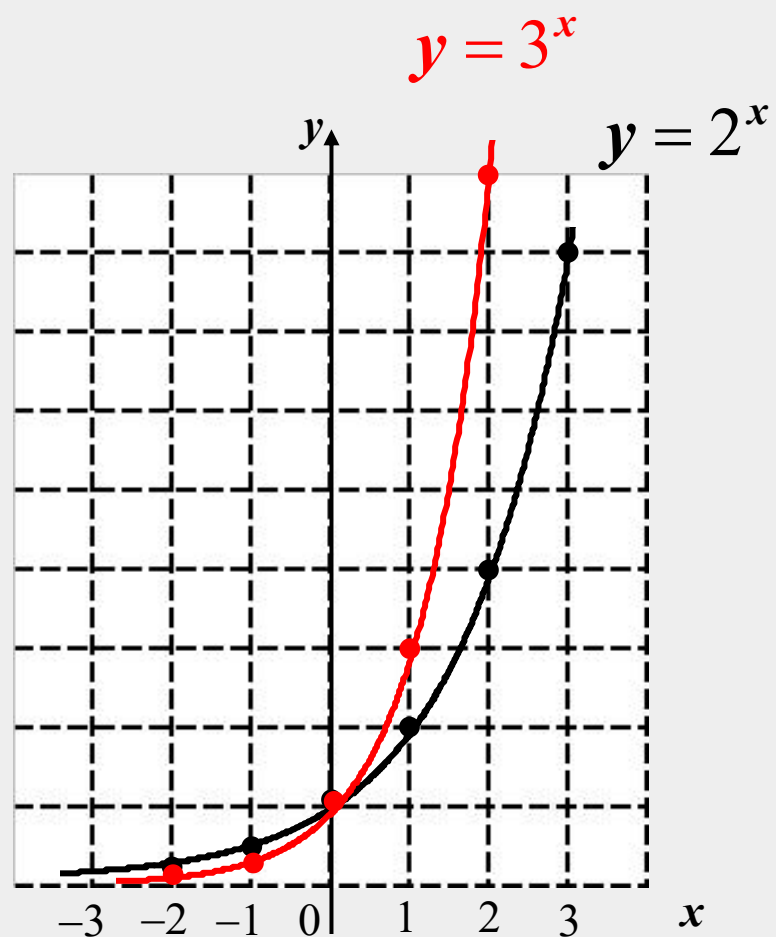




(二) 探索新知

2. 描点

3. 连线





(二) 探索新知

用描点法作函数

$y = (\frac{1}{2})^x$ 和 $y = (\frac{1}{3})^x$ 的图象

1. 列表

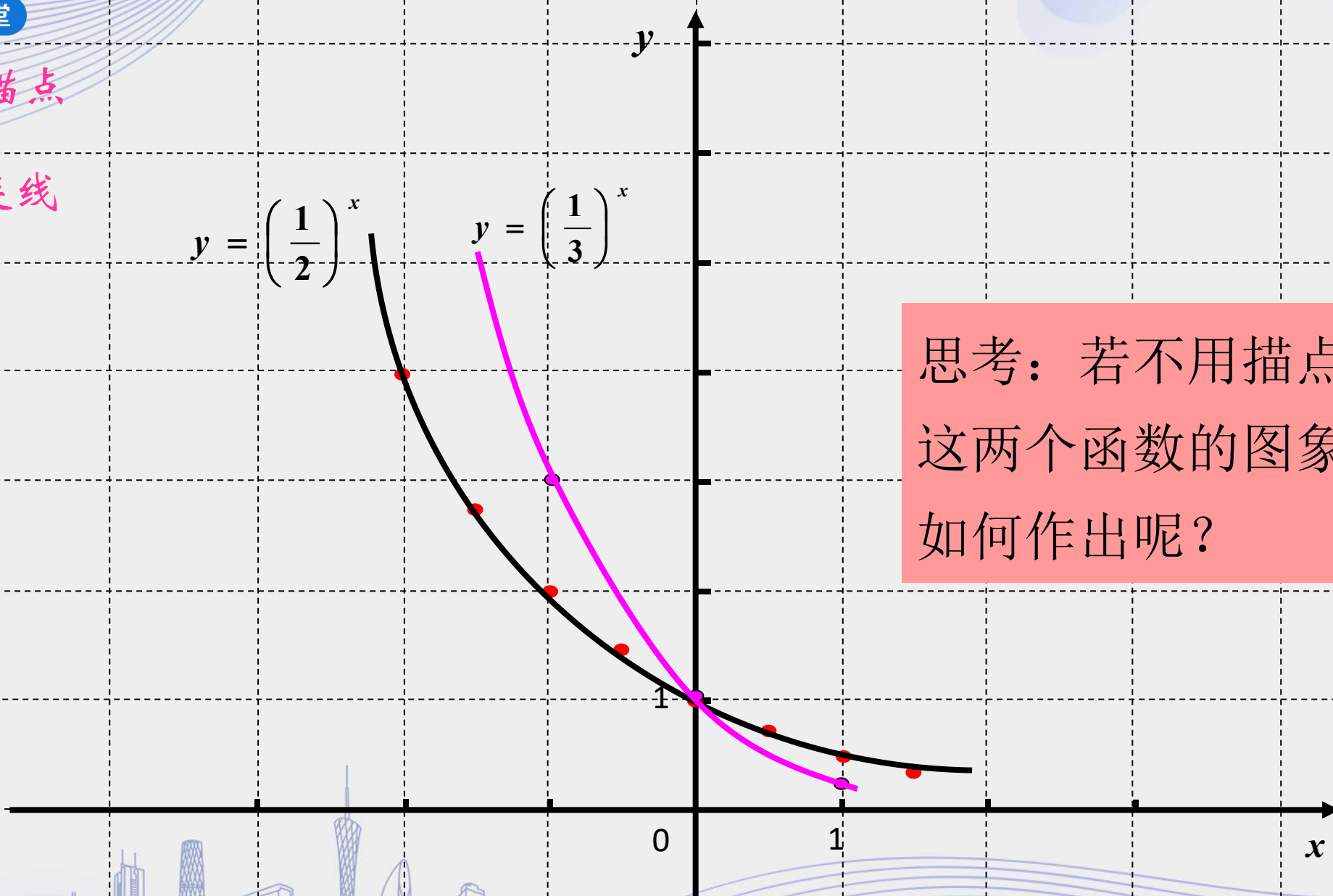
x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = (\frac{1}{2})^x$	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...
$y = (\frac{1}{3})^x$	...	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	...





2. 描点

3. 连线

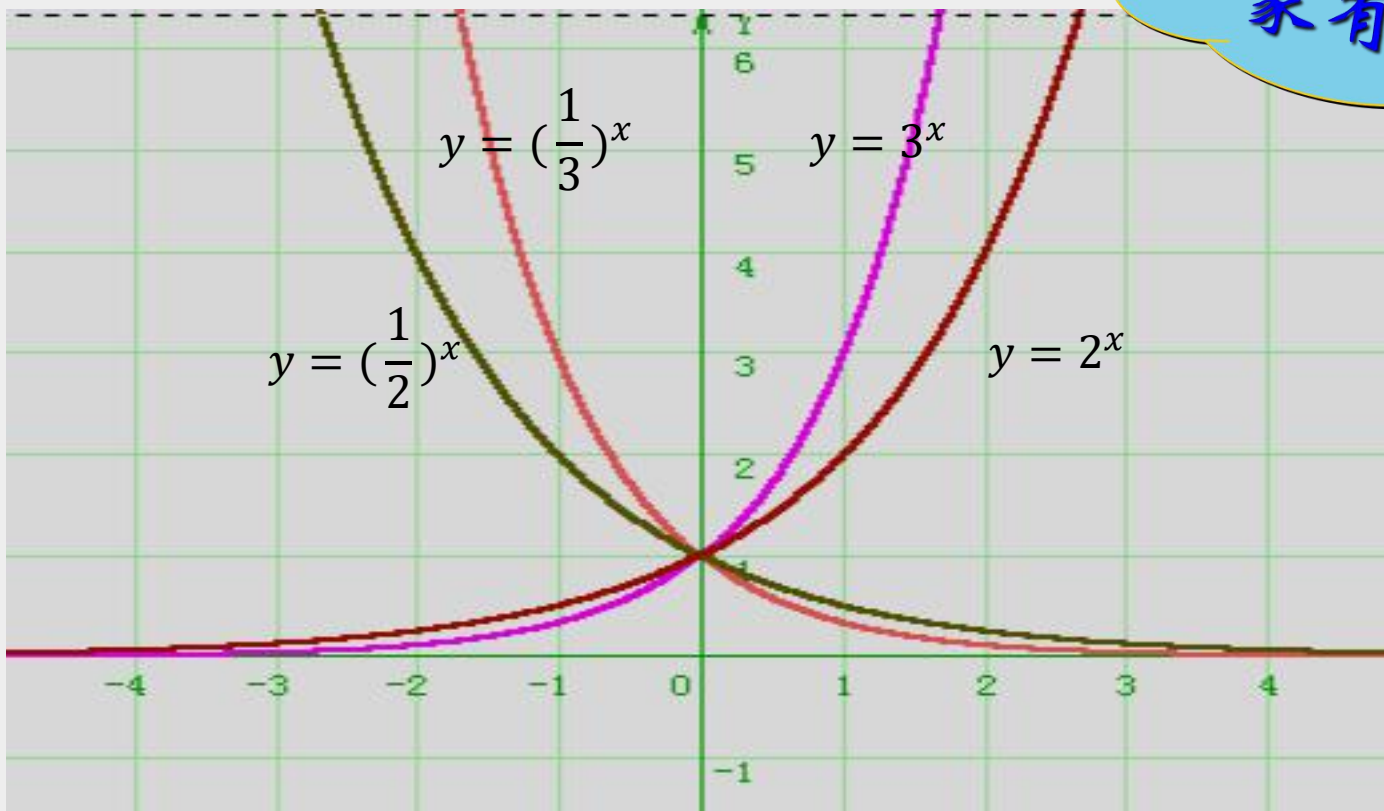


思考：若不用描点法，
这两个函数的图象又该
如何作出呢？



(二) 探索新知

这四个图
象有何特点?





(二) 探索新知

探究1. 比较函数 $y = 2^x$ 和函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的图象，它们有什么关系？能否利用函数 $y = 2^x$ 的图象，画出函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的图象？

因为 $y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ ，点 (x, y) 与点 $(-x, y)$ 关于 y 轴对称，所以函数 $y = 2^x$ 图象上任意一点 $P(x, y)$ 关于 y 轴的对称点 $P_1(-x, y)$ 都

在函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的图象上，反之亦然.

由此可知，底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 y 轴对称.



$y = a^x (a > 1)$ 与 $y = (\frac{1}{a})^x (a > 1)$ 关于 y 轴对称.



(二) 探索新知

探究2. 选取底数 $a(a > 0$, 且 $a \neq 1$)的若干个不同的值, 在同一直角坐标系内画出相应的指数函数的图象. 观察这些图象的位置、公共点和变化趋势, 它们有哪些共性? 由此你能概括出指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)的值域和性质吗?





(二) 探索新知

问题1：这些图象分别在哪儿几个象限？

答：所有图象都在第一、二象限

问题2：图象的上升、下降与底数 a 有联系吗？

答：当底数 $a > 1$ 时图象上升；
当底数 $0 < a < 1$ 时图象下降。





(二) 探索新知

问题3：所有图象都经过哪个点？

答：所有图象都经过点 $(0, 1)$.

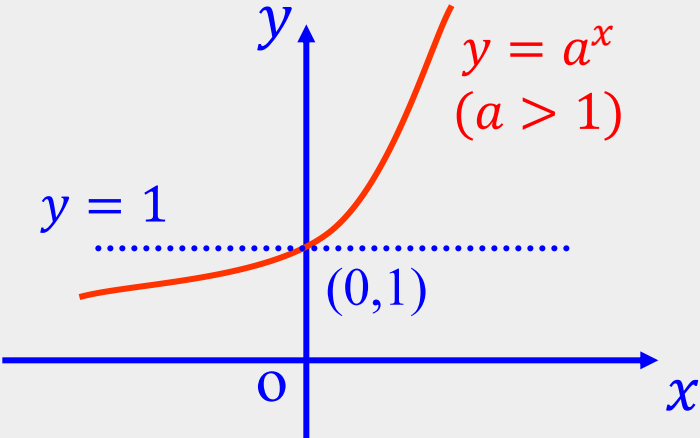
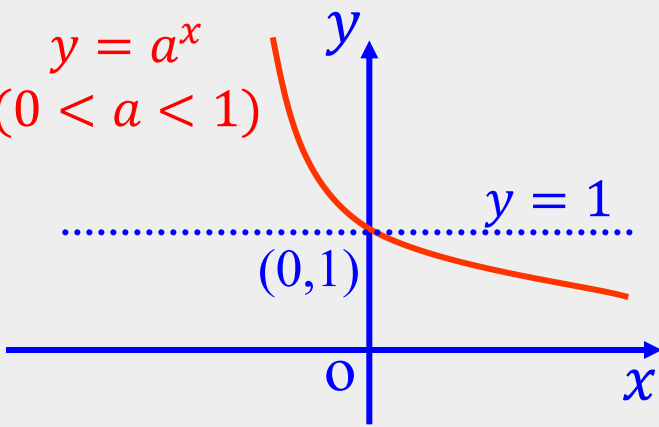
问题4：函数定义域和值域分别是什么？

答：定义域为 $\mathbf{R}$ ，值域为 $(0, +\infty)$.





(三) 建构新知

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图 象		
性 质	定义域： $\mathbf{R}$	
	值域： $(0, +\infty)$	
	必过点： $(0, 1)$	
	$x > 0, y > 1$; $x < 0, 0 < y < 1$	$x < 0, y > 1$; $x > 0, 0 < y < 1$
	在 $\mathbf{R}$ 上是 增函数	在 $\mathbf{R}$ 上是 减函数



(四) 题型分析

题型一：指数型函数过定点问题

例1. 函数 $f(x) = a^{x-3} + 3$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象过定点_____

答案：(3,4)

解析：要使函数过定点，即函数值与 a 无关，只需指数为零。

令 $x - 3 = 0$ ，即 $x = 3$ 时，

$$f(x) = a^0 + 3 = 4,$$

故函数 $f(x) = a^{x-3} + 3$ 恒过定点(3,4).





(四) 题型分析

题型一：指数型函数过定点问题

跟踪训练1. 已知函数 $f(x) = a^{x+1} - 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象一定过定点 P ，则定点 P 的坐标是_____

答案： $(-1, -1)$

解析：当 $x + 1 = 0$ ，即 $x = -1$ 时，

$$f(x) = a^0 - 2 = -1,$$

故函数 $f(x) = a^{x+1} - 2$ 恒过定点 $(-1, -1)$.



题型二：应用指数函数的单调性比较大小

例2. 比较下列各题中两个值的大小：

(1) $1.7^{2.5}$ ___ 1.7^3 (2) 0.8^{-1} ___ 0.8^{-2} (3) $1.7^{0.5}$ ___ $0.8^{2.5}$

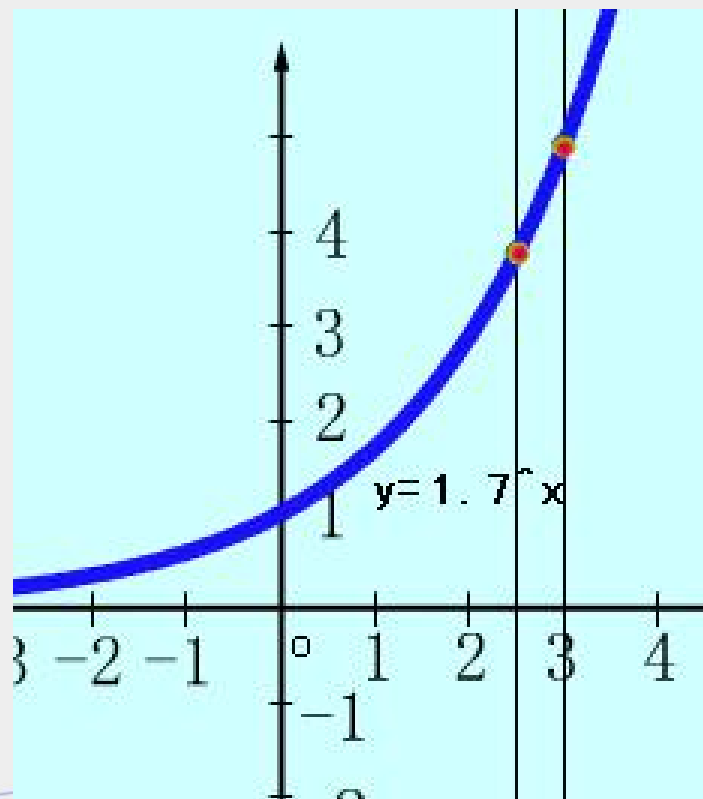
解：(1) $1.7^{2.5}$ 和 1.7^3 可看作函数 $y = 1.7^x$
当 x 分别取 2.5 和 3 时的函数值.

∵ 底数 $1.7 > 1$,

∴ 指数函数 $y = 1.7^x$ 是增函数.

又 ∵ $2.5 < 3$,

∴ $1.7^{2.5} < 1.7^3$.





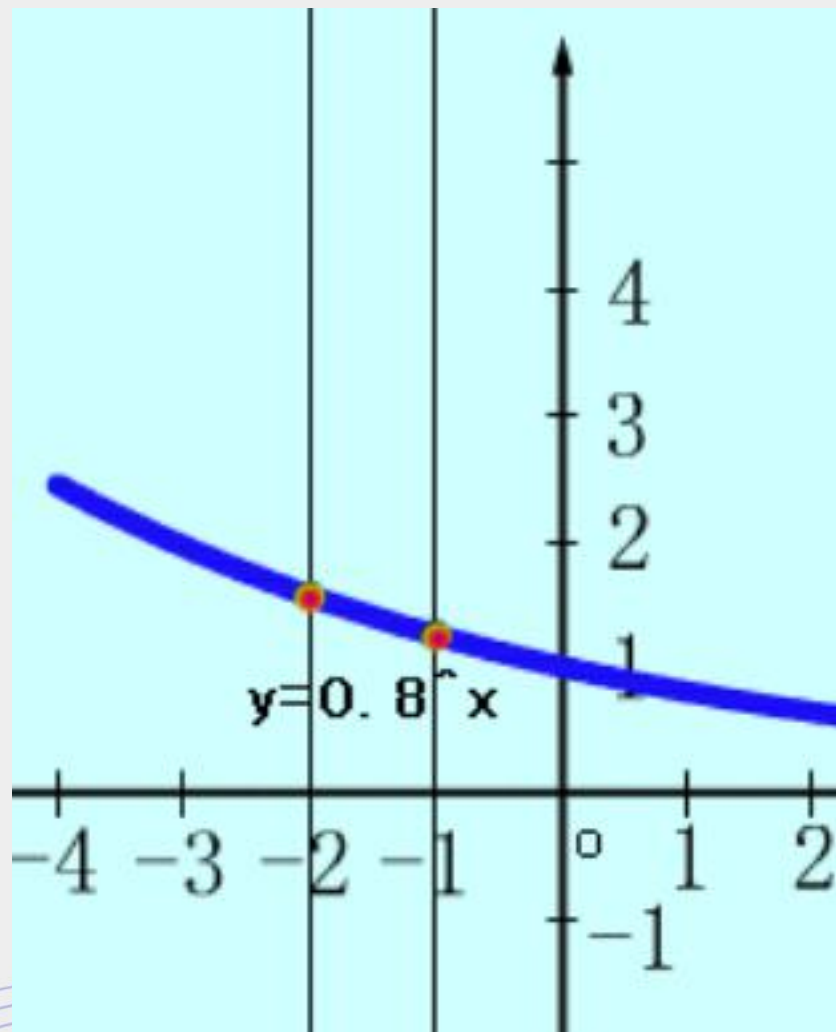
(2) 0.8^{-1} 0.8^{-2}

(2) $\because$ 函数 $y = 0.8^x$

在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

又 $\because -1 > -2$,

$\therefore 0.8^{-1} < 0.8^{-2}$





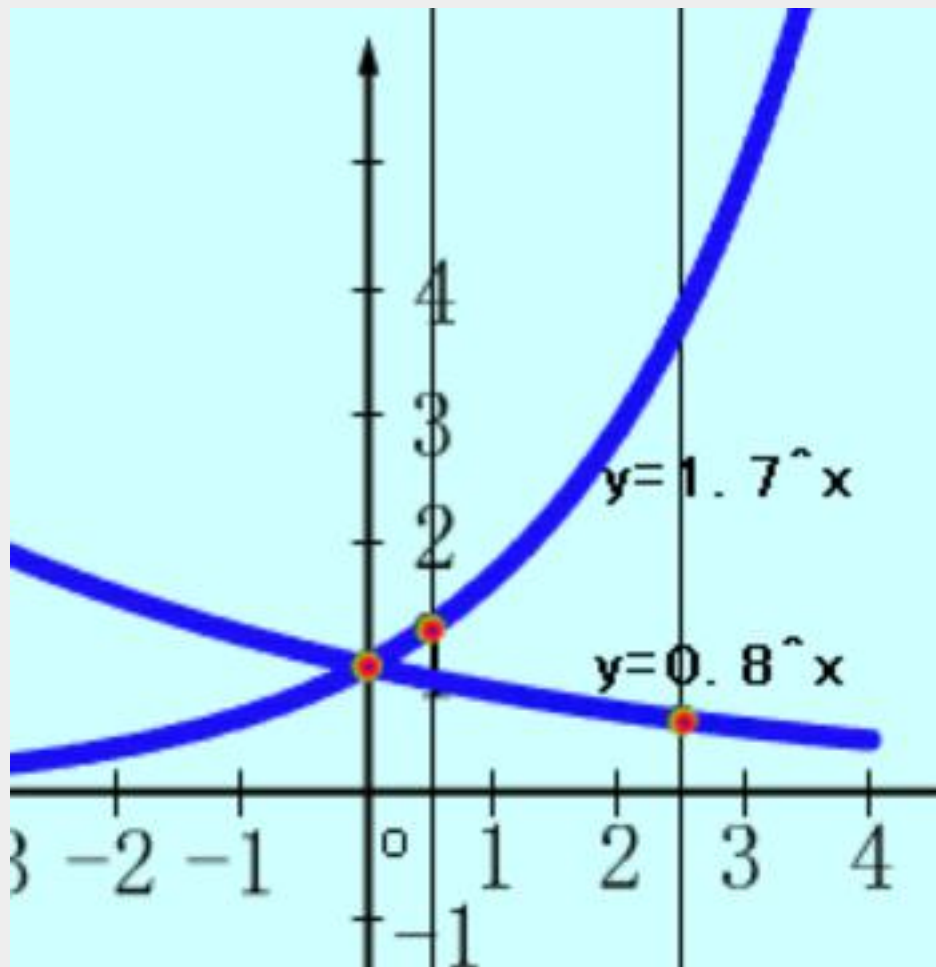
(3) $1.7^{0.5}$ ___ $0.8^{2.5}$

(3) 由指数函数的性质知

$$1.7^{0.5} > 1.7^0 = 1$$

$$0.8^{2.5} < 0.8^0 = 1$$

$$\therefore 1.7^{0.5} > 0.8^{2.5}$$





题型二：应用指数函数的单调性比较大小

跟踪训练2. 比较下面两个数的大小：

$$(a-1)^{1.3} \text{ 与 } (a-1)^{2.4} \quad (a > 1, \text{ 且 } a \neq 2).$$

解：因为 $a > 1$, 且 $a \neq 2$, 所以 $a-1 > 0$, 且 $a-1 \neq 1$,

①若 $a-1 > 1$, 即 $a > 2$, 则 $y = (a-1)^x$ 是增函数,

$$\therefore (a-1)^{1.3} < (a-1)^{2.4}.$$

②若 $0 < a-1 < 1$, 即 $1 < a < 2$, 则 $y = (a-1)^x$ 是减函数,

$$\therefore (a-1)^{1.3} > (a-1)^{2.4}.$$

故当 $a > 2$ 时, $(a-1)^{1.3} < (a-1)^{2.4}$;

当 $1 < a < 2$ 时, $(a-1)^{1.3} > (a-1)^{2.4}$.





比较幂的大小的方法总结

- (1) 同底数幂比较大小时构造指数函数，根据其单调性比较.
- (2) 底数、指数都不相同时，可以借助“1”与两数比较，或画图直接描点，采取观察法比较大小.
- (3) 当底数含参数时，要按底数 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 两种情况分类讨论.





题型三：应用指数函数的单调性解指数不等式

例3.解不等式 $(\frac{1}{2})^{3x-1} \leq 2$;

解： $\because 2 = (\frac{1}{2})^{-1}$,

$\therefore$ 原不等式可以转化为 $(\frac{1}{2})^{3x-1} \leq (\frac{1}{2})^{-1}$

$\because y = (\frac{1}{2})^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数,

$\therefore 3x-1 \geq -1, \therefore x \geq 0,$

故原不等式的解集是 $[0, +\infty)$.



题型三：应用指数函数的单调性解指数不等式

跟踪训练3. 已知 $a^{x^2-3x+1} < a^{x+6}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 求 x 的取值范围.

解 分情况讨论:

①当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

$$\therefore x^2 - 3x + 1 > x + 6, \quad \therefore x^2 - 4x - 5 > 0,$$

解得 $x < -1$ 或 $x > 5$,

所以原不等式的解集是 $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$.





②当 $a > 1$ 时，函数 $y = a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

$$\therefore x^2 - 3x + 1 < x + 6, \quad \therefore x^2 - 4x - 5 < 0,$$

解得 $-1 < x < 5$,

所以原不等式的解集是 $(-1, 5)$.

综上所述，当 $0 < a < 1$ 时，不等式的解集是 $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$;

当 $a > 1$ 时，不等式的解集是 $(-1, 5)$.





反思感悟

(1) 利用指数函数的单调性解不等式，需将不等式两边都凑成底数相同的指数式.

(2) 解不等式 $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的依据是指数型函数的单调性，要养成判断底数取值范围的习惯，若底数不确定，就需进行分类讨论，即 $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$ ($a > 1$) 或 $f(x) < g(x)$ ($0 < a < 1$)



(五) 当堂达标

1. 若 $2^{x+1} < 1$, 则 x 的取值范围是 ()

A. $(-1, 1)$

B. $(-1, +\infty)$

C. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, -1)$

答案: D

解析: $\because 2^{x+1} < 1 = 2^0$, 且 $y = 2^x$ 是增函数,

$\therefore x + 1 < 0, \therefore x < -1$.





2. 下列判断正确的是 ()

A. $1.7^{2.5} > 1.7^3$

B. $0.8^2 < 0.8^3$

C. $\pi^2 < \pi^{\sqrt{2}}$

D. $0.9^{0.3} > 0.9^{0.5}$

答案: D

解析: $\because y = 0.9^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数, $0.3 < 0.5$

$$\therefore 0.9^{0.3} > 0.9^{0.5}.$$





3. 已知 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 函数 $f(x) = a^x$, 若实数 m, n 满足 $f(m) > f(n)$, 则 m, n 的大小关系为_____

答案: $m < n$

解析: $\because a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in (0,1), \therefore f(x) = a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数,

又 $f(m) > f(n)$,

$\therefore m < n$





(六) 课堂小结

1. 指数函数的图象及其性质

2. 题型分析:

题型一：指数型函数过定点问题

题型二：应用指数函数的单调性比较大小

题型三：应用指数函数的单调性解指数不等式





感谢观看！





4.2.2 指数函数的图象和性质 答疑

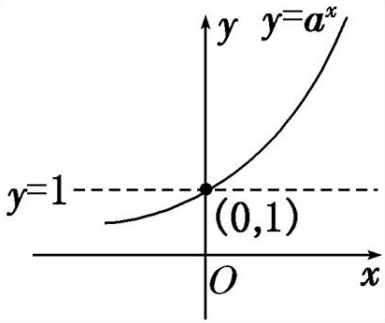
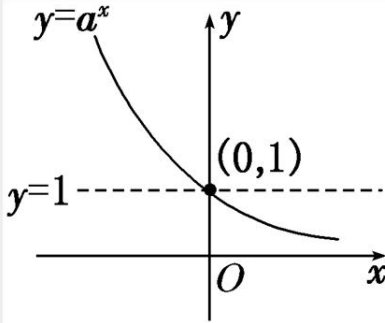
广州市育才中学 周莲芳





知识清单

1. 指数函数的图象和性质

		$a > 1$	$0 < a < 1$
图 象			
性 质	定义域	<u>$\mathbf{R}$</u>	
	值域	<u>$(0, +\infty)$</u>	
	过定点	过点 <u>$(0, 1)$</u> 即 $x = \underline{0}$ 时, $y = \underline{1}$	
	单调性	是 $\mathbf{R}$ 上的 <u>增函数</u>	是 $\mathbf{R}$ 上的 <u>减函数</u>

[点睛] 底数 a 与 1 的大小关系决定了指数函数图象的“升”与“降”. 当 $a > 1$ 时, 指数函数的图象是“上升”的; 当 $0 < a < 1$ 时, 指数函数的图象是“下降”的.





疑难点突破：指数型函数的定义域与值域问题

例1. 求下列函数的定义域与值域

$$(1) y = 2^{\frac{1}{x-4}}; \quad (2) y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-|x|}.$$

解：(1) 由 $x - 4 \neq 0$, 得 $x \neq 4$,

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

$$\because \frac{1}{x-4} \neq 0 \quad \therefore 2^{\frac{1}{x-4}} \neq 2^0 \quad \therefore y \neq 1$$

$\therefore y = 2^{\frac{1}{x-4}}$ 的值域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.



$$(2) y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-|x|}$$

解:(2)函数的定义域为 $\mathbf{R}$

$$\because y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-|x|} = \left(\frac{3}{2}\right)^{|x|}, \text{ 且 } |x| \geq 0$$

$$\because y = \left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上单调递增}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{|x|} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$$

故 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-|x|}$ 的值域为 $[1, +\infty)$.



跟踪训练1. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象经过点 $(2, \frac{1}{9})$.

(1) 比较 $f(2)$ 与 $f(b^2 + 2)$ 的大小;

(2) 求函数 $g(x) = a^{x^2 - 2x}$ ($x \geq 0$) 的值域.

解:(1) 由已知得 $a^2 = \frac{1}{9}$, 解得 $a = \pm \frac{1}{3}$

$\because a > 0 \therefore a = \frac{1}{3}$ 则 $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

$\therefore f(x) = (\frac{1}{3})^x$ 在 R 上单调递减

$\because 2 \leq b^2 + 2$

$\therefore f(2) \geq f(b^2 + 2)$



跟踪训练1. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象经过点 $(2, \frac{1}{9})$.

(1) 比较 $f(2)$ 与 $f(b^2 + 2)$ 的大小;

(2) 求函数 $g(x) = a^{x^2 - 2x}$ ($x \geq 0$) 的值域.

解:(2) 由(1)得 $a = \frac{1}{3} \therefore g(x) = (\frac{1}{3})^{x^2 - 2x}$

$$\because x \geq 0 \therefore x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$$

$$\therefore 0 < (\frac{1}{3})^{x^2 - 2x} \leq (\frac{1}{3})^{-1} = 3$$

即函数 $g(x) = a^{x^2 - 2x}$ ($x \geq 0$) 的值域为 $(0, 3]$.



解题方法

指数型函数 $y = a^{f(x)}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的定义域、值域的求法

1. 定义域的求法:

函数 $y = a^{f(x)}$ 的定义域与 $y = f(x)$ 的定义域相同.

2. 函数 $y = a^{f(x)}$ 的值域的求法如下:

①换元, 令 $t = f(x)$;

②求 $t = f(x)$ 的定义域 $x \in D$;

③求 $t = f(x)$ 的值域 $t \in M$;

④利用 $y = a^t$ 的单调性求 $y = a^t$ ($t \in M$) 的值域.





感谢观看！

