共享课堂

函数模型的应用（一）

广州市第七中学 黄嘉欣

广州教育

学习目标

（1）能明确教科书例题中的数量关系，认识指数函数模型；

（2）能利用教科书中的例题数据，求解并检验数学模型；

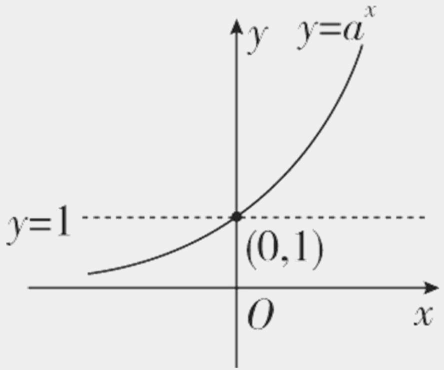
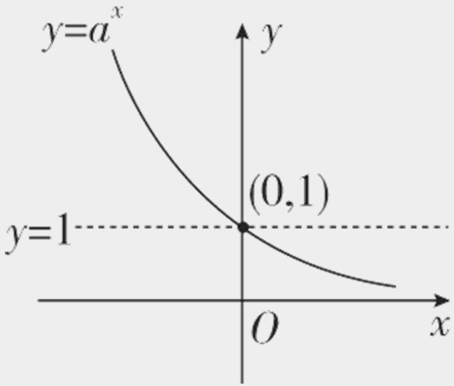
（3）利用已知函数模型解决实际问题，初步体验数学建模的基本步骤，提升学生的数学建模素养。

基础知识回顾

函数模型

- 正比例函数
- 反比例函数
- 一次函数
- 二次函数
- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数

指数函数

<table>
<tr><th>$a>1$</th><th>$0<a<1$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

指数型函数模型　$y=ba^x+c$(a，b，c为常数，$b\neq 0$，$a>0$且$a\neq 1$)

例1　人口增长模型

人口问题是当今世界各国普遍关注的问题，认识人口数量的变化规律，可以为制定一系列相关政策提供依据。早在1798年，英国经济学家马尔萨斯就提出了自然状态下的人口增长模型，

$$y=y_0e^{rt}$$

其中 t 表示经过的时间，y_0 表示 $t=0$ 时的人口数，r 表示人口的年平均增长率.

人口增长模型　$y=y_0e^{rt}$

（1）根据国家统计局网站公布的数据，我国1950年末、1959年末的人口总数分别为55196万和67207万。根据这些数据，用马尔萨斯人口增长模型建立我国1950-1959年间的具体人口增长模型。

解：（1）由题意知 $y_0=55\ 196$，设 1950～1959 年期间我国人口的年平均增长率为 r，根据马尔萨斯人口增长模型，有

$$67\ 207=55\ 196e^{9r},$$

由计算工具得

$$r\approx 0.021\ 876.$$

因此我国在 1950～1959 年期间的人口增长模型为

$$y=55\ 196e^{0.021\ 876t},\ t\in[0,9].$$

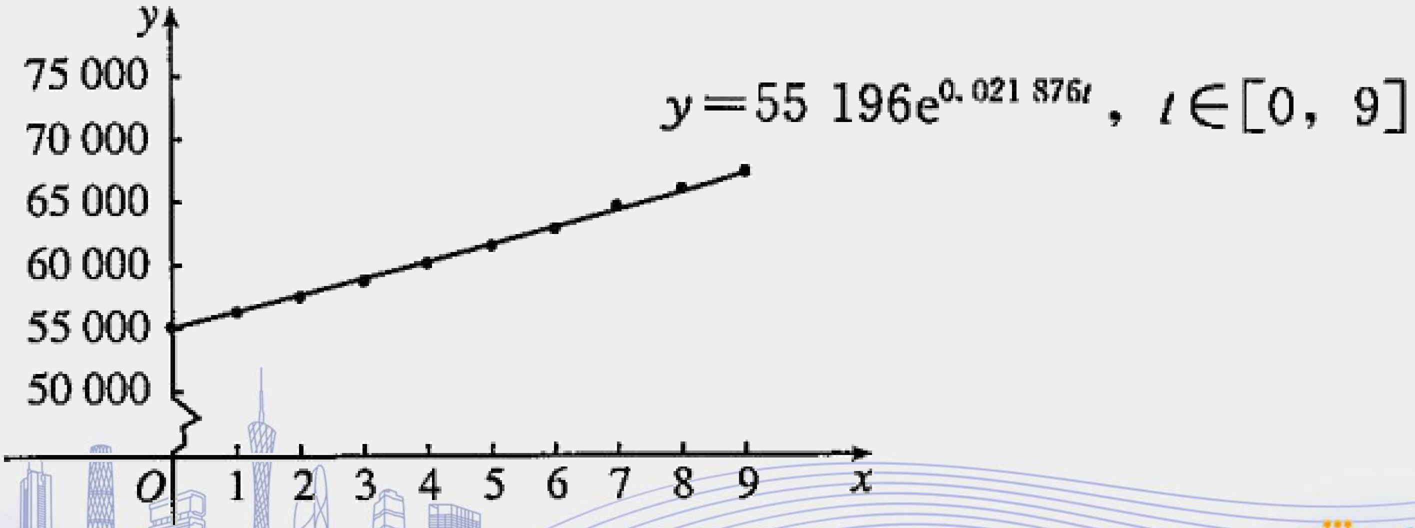
人口增长模型　$y=y_0e^{rt}$

（2）利用（1）中的模型计算1951-1958年各年末的人口总数。查阅国家统计局网站公布的我国在1951-1958年间各年末的实际人口总数，检验所得模型与实际人口数据是否相符。

年份	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
计算所得人口总数/万	56417	57665	58940	60243	61576	62938	64330	65753
实际人口总数/万	56300	57482	58796	60266	61465	62828	64563	65994

人口增长模型　$y=y_0e^{rt}$

（2）利用（1）中的模型计算1951-1958年各年末的人口总数。查阅国家统计局网站公布的我国在1951-1958年间各年末的实际人口总数，检验所得模型与实际人口数据是否相符。



人口增长模型　$y=y_0e^{rt}$

（3）以（1）中的模型作预测，大约在什么时候我国人口总数达到13亿？

（3）将 $y=130\ 000$ 代入

$$y=55\ 196e^{0.021\ 876t},$$

由计算工具得

$$t\approx 39.15.$$

所以，如果人口按照（1）中的模型增长，那么大约在1950年后的第40年（即1990年），我国的人口就已达到13亿.

思考

事实上，我国1990年的人口数为11.43亿，直到2005年才突破13亿对由函数模型所得的结果与实际情况不符，你有何看法？

因为人口基数较大，人口增长过快，
与我国经济发展水平产生较大矛盾
所以我国从20世纪70年代逐步实施计划生育政策（年增长率变化）
不符合马尔萨斯人口增长模型的条件(年增长率不变)
自然就出现了依模型得到的结果与实际不符的情况

例2　元素衰变模型

　　2010年，考古学家对良渚古城水利系统中的一条水坝的建筑材料（草裹泥）上提取的草茎遗存进行碳14年代学检测，检测出碳14的残留量约为初始量的55.2%，能否以此推断此水坝大概是什么年代建成的？

思考

科学研究表明，宇宙射线在大气中能够产生包括碳14在内的放射性物质，碳14的衰减非常有规律，其准确性可以称为自然界的“准确时钟”。死亡后的动植物停止了与外界的相互作用，体内原有的碳14按确定的规律衰减，半衰期为5730年。这也是考古中常用碳14来推断年代的原因。

那么，碳14的变化规律属于哪种常用的函数模型，如何利用已知数据建立具体的数学函数模型？

当生物死亡后，它机体内原有的碳14含量会按确定的比率衰减（称为衰变率），属于**指数衰减**

大约每经过5730年衰减为原来的一半，这个时间称为“**半衰期**”

元素衰变模型 $y=ka^x$

解：设样本中碳14的初始量为k，衰变率为$p(0<p<1)$

经过x年后，残余量为y，

则$y=k(1-p)^x,(k\in R,k\neq 0,0<p<1,x\geq 0)$

由碳14的半衰期为5730年，得

$$k(1-p)^{5730}=\frac{1}{2}k$$

得$1-p=\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}$

所以$y=k(\sqrt[5730]{\frac{1}{2}})^x$

元素衰变模型 $y=k(\sqrt[5730]{\frac{1}{2}})^x$

由题知：残余量约是初始量的55.2%

即令$y=k(\sqrt[5730]{\frac{1}{2}})^x$中$y$=55.2%$k$

$k(\sqrt[5730]{\frac{1}{2}})^x=55.2\%k$

即$(\sqrt[5730]{\frac{1}{2}})^x=0.552$

解得：$x=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}0.552$

由计算工具得：$x\approx 4912$

因为2010年之前的4912年是公元前2903年，所以推断水坝大概是公元前2903年建成的.

课堂练习

完成教科书150页练习第1题，第2题

第1题

已知1650年世界人口为5亿，当时人口的年增长率为0.3%；1970年世界人口为36亿，当时人口的年增长率为2.1%.

（1）用马尔萨斯人口模型计算，什么时候世界人口是1650年的2倍？什么时候世界人口是1970年的2倍？

（2）实际上，1850年以前世界人口就超过了10亿；而2004年世界人口还没有达到72亿.你对同样的模型得出的两个结果有何看法？

人口增长模型 $y = y_0 e^{rt}$

已知1650年世界人口为5亿，当时人口的年增长率为0.3%；1970年世界人口为36亿，当时人口的年增长率为2.1%.

（1）用马尔萨斯人口模型计算，什么时候世界人口是1650年的2倍？什么时候世界人口是1970年的2倍？

解：按1650年人口的年增长率0.3%建立人口增长模型得

$$y = 50000e^{0.003t}, t \geq 0$$

将 $y = 100000$ 代入上述模型得

$$100000 = 50000e^{0.003t}$$

由计算工具得 $t \approx 231.049$

所以，按照1650年人口的年增长率0.3%，232年后（即1882年）世界人口是1650年的2倍,达到10亿

人口增长模型 $y = y_0 e^{rt}$

已知1650年世界人口为5亿，当时人口的年增长率为0.3%；1970年世界人口为36亿，当时人口的年增长率为2.1%.

（1）用马尔萨斯人口模型计算，什么时候世界人口是1650年的2倍？什么时候世界人口是1970年的2倍？

解：按1970年人口的年增长率2.1%建立人口增长模型得

$$y = 360000e^{0.021t}, t \geq 0$$

将 $y = 720000$ 代入上述模型得

$$720000 = 360000e^{0.021t}$$

由计算工具得 $t \approx 33.007$

所以，按照1970年人口的年增长率2.1%，34年后（即2004年）世界人口是1970年的2倍，达到72亿

人口增长模型 $y = y_0 e^{rt}$

（2）实际上，1850年以前世界人口就超过了10亿；而2004年世界人口还没有达到72亿. 你对同样的模型得出的两个结果有何看法？

马尔萨斯人口模型是用来刻画自然状态下的人口增长模型，其中的参数r表示人口的年平均增长率.

这两段时期都存在人口非自然增长的状况，且计算选择的增长率都不是这两段时期的平均增长率，所以所得出的两个结果与实际存在差异.

第2题

在一段时间内，某地的野兔快速繁殖，野兔总只数的倍增期为21个月，那么1万只野兔增长到1亿只野兔大约需要多少年？

分析：

由于快速繁殖的野兔的倍增期为21个月，则可选择指数函数模型刻画该地在这段时间内野兔的增长规律.

指数函数模型 $y=a^x$

解：设野兔的初始量为1万只

经过 x 个月野兔增长到 y 万只，增长率为 $p(p>1)$

则有 $y=p^x$， $x\geq 0$

由倍增期为21个月，得 $p^{21}=2$

得 $p=\sqrt[21]{2}$

所以 $y=(\sqrt[21]{2})^x$

指数函数模型 $y=(\sqrt[21]{2})^x$

由题知：

将 $y=10000$ 代入 $y=(\sqrt[21]{2})^x$

即 $10000=(\sqrt[21]{2})^x$

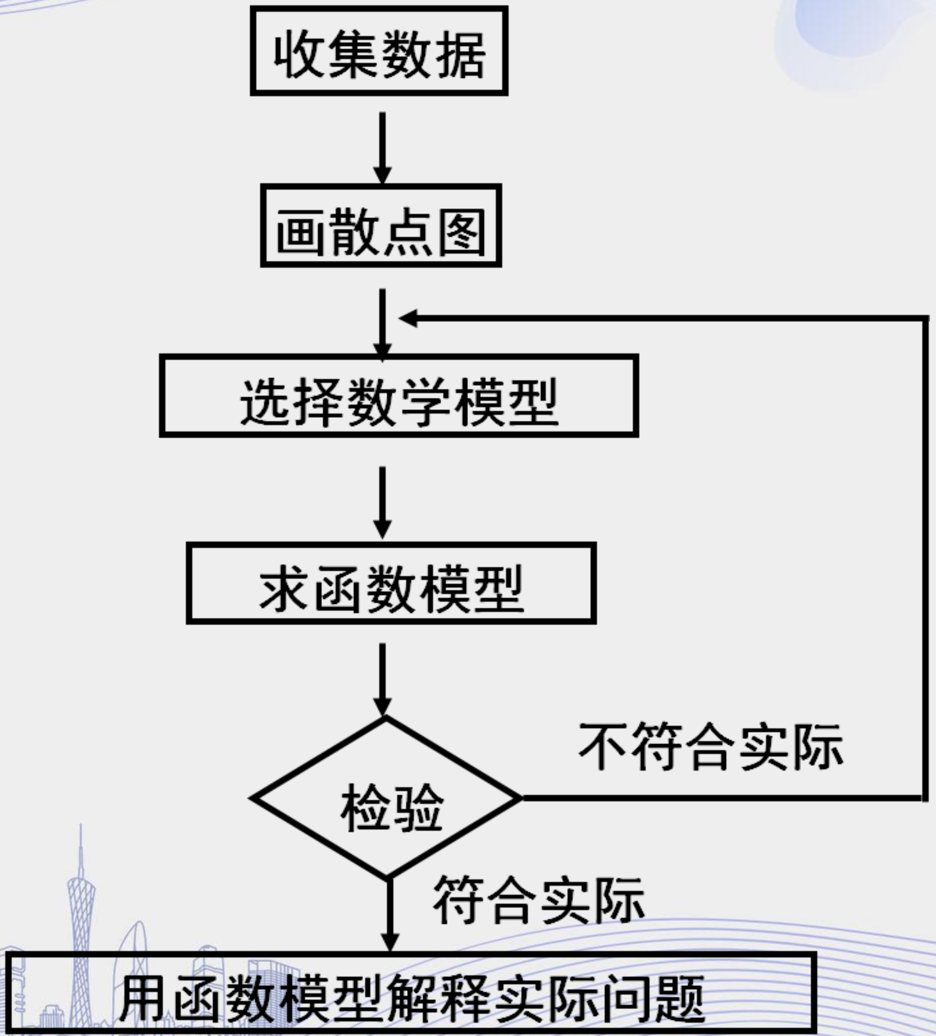
由计算工具得 $x\approx 280$（月）≈ 24（年）

所以，1万只野兔增长到1亿只野兔大约需要24年.

课堂小结

本节课我们尝试利用已知函数模型解决实际问题，通过运算推理求解模型，并将得到的函数模型用于描述实际问题的变化规律，从而解决有关问题，感受了利用函数模型解决实际问题的过程。

你能归纳出利用已知函数模型解决实际问题的基本过程吗？


收集数据
画散点图
选择数学模型
求函数模型
检验
不符合实际
符合实际
用函数模型解释实际问题

共享课堂

谢谢观看

广州教育

函数模型的应用（一） 答疑

广州市第七中学 黄嘉欣

例1　人口增长模型

早在1798年，英国经济学家马尔萨斯就提出了自然状态下的人口增长模型

$$y = y_0 e^{rt}$$

其中 t 表示经过的时间，y_0 表示 $t=0$ 时的人口数， r 表示人口的年平均增长率

$$\boxed{y = y_0 (e^{r})^{t}}$$

指数型函数模型　$y=ba^x+c(a，b，c$为常数，$b\neq 0，a>0$且$a\neq 1)$

思考

事实上，我国1990年的人口数为11.43亿，直到2005年才突破13亿对由函数模型所得的结果与实际情况不符，你有何看法？

我国从20世纪70年代逐步实施了计划生育政策，
不符合马尔萨斯人口增长模型的条件(年增长率不变)

随着时间增加，人口按指数规律无限增长？

人口增长模型 $y = y_0 e^{rt}$

不能预测较长期的人口增长过程

年增长率r不是常数(逐渐下降)

人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用

且阻滞作用随人口数量增加而变大

阻滞增长模型　Logistic模型

人口增长模型 $y = y_0 e^{rt}$

（3）以（1）中的模型作预测，大约在什么时候我国人口总数达到13亿？

（3）将 $y=130\ 000$ 代入

$$y=55\ 196e^{0.021\ 876t},$$

由计算工具得

$$t\approx 39.15.$$

所以，如果人口按照（1）中的模型增长，那么大约在 1950 年后的第 40 年（即 1990 年），我国的人口就已达到 13 亿.

例2　元素衰变模型

科学研究表明，死亡后的动植物停止了与外界的相互作用，体内原有的碳14按确定的规律衰减，半衰期为5730年。这也是考古中常用碳14来推断年代的原因。

那么，碳14的变化规律属于哪种常用的函数模型，如何利用已知数据建立具体的数学函数模型？

$$y = ka^x$$

元素衰变模型 $y = ka^x$

设初始量为1？

解：设样本中碳14的初始量为k,衰变率为$p(0<p<1)$

经过x年后，残余量为y,

则$y=k(1-p)^x,(k\in R,k\neq 0,0<p<1,x\geq 0)$

由碳14的半衰期为5730年，得

$$k(1-p)^{5730}=\frac{1}{2}k$$

得$1-p=\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}$

所以$y=k(\sqrt[5730]{\frac{1}{2}})^x$

共享课堂

元素衰变模型 $y=ka^x$ $\boxed{k=1}$

解：设样本中碳14的初始量为1，衰变率为$p(0<p<1)$

经过x年后，残余量为y，

则$y=(1-p)^x,(k\in R,k\neq 0,0<p<1,x\geq 0)$

由碳14的半衰期为5730年，得

$$(1-p)^{5730}=\frac{1}{2}$$

得$1-p=\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}$

指数函数

$\boxed{\text{所以}y=(\sqrt[5730]{\frac{1}{2}})^x}$

广州教育

利用已知函数模型解决实际问题

人口增长模型　$y = y_0 e^{rt}$

元素衰变模型　$y = ka^x$

谢谢观看