5.1.1 任意角

广州市第四中学 刘运科

一、学习目标

1．通过生活实例，体会引入任意角的必要性，了解任意角的概念，培养直观想象、数学抽象素养；

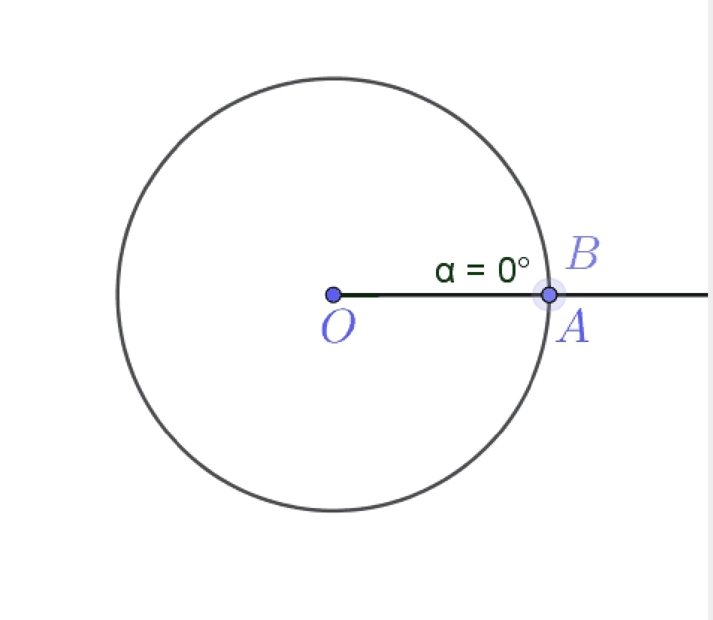
2．掌握正角、负角、零角、终边相同的角、轴线角、象限角的定义，理解任意角的概念，培养直观想象、数学抽象素养；

3．会判断角所在的象限，掌握终边相同的角的集合表示方法，培养数学运算、逻辑推理素养．

二、角的概念

1．引入

由初中知识可知，射线OA绕端点O按逆时针方向旋转一周回到起始位置，在这个过程中可以得到0°~360°范围内的角；如果继续旋转，那么所得到的角就超出这个范围了.



二、角的概念

1．引入

例如，体操中有“前空翻转体540°”“后空翻转体720°”这样的动作名称，这里不仅有超出0°~360°范围的角，而且旋转的方向也不相同.

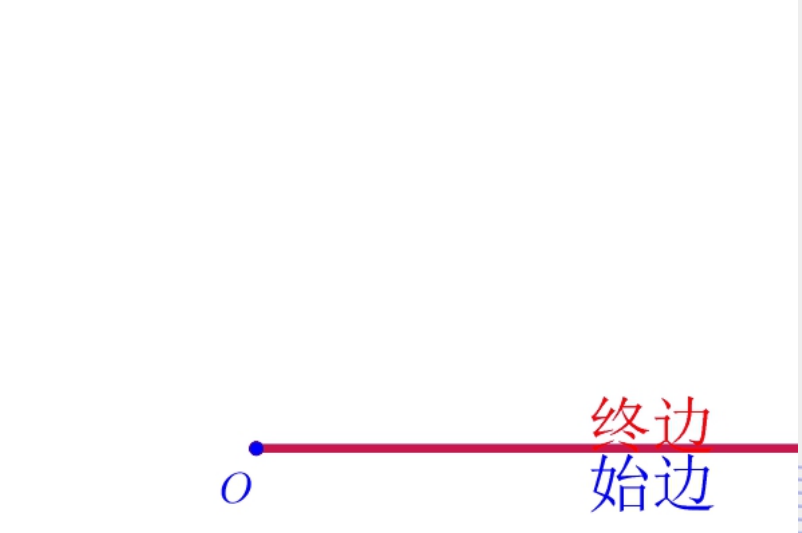
京格尔空翻
图片来源：搜狐

为了准确描述这些现象，有必要将角的概念推广到任意角.

二、角的概念

2．角的概念：平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形叫做角.

3．角的构成要素：顶点、始边、终边.



二、角的概念

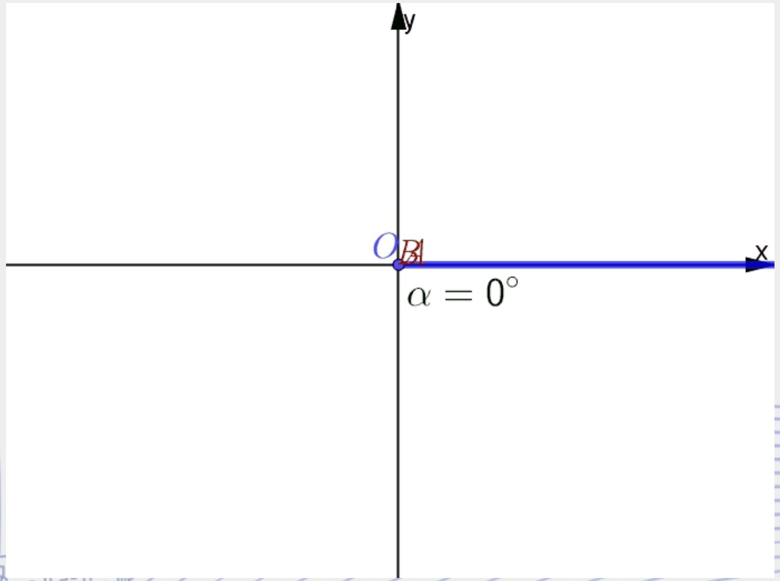
4．我们规定，一条射线绕其端点

按逆时针方向旋转形成的角叫做正角；

按顺时针方向旋转形成的角叫做负角；

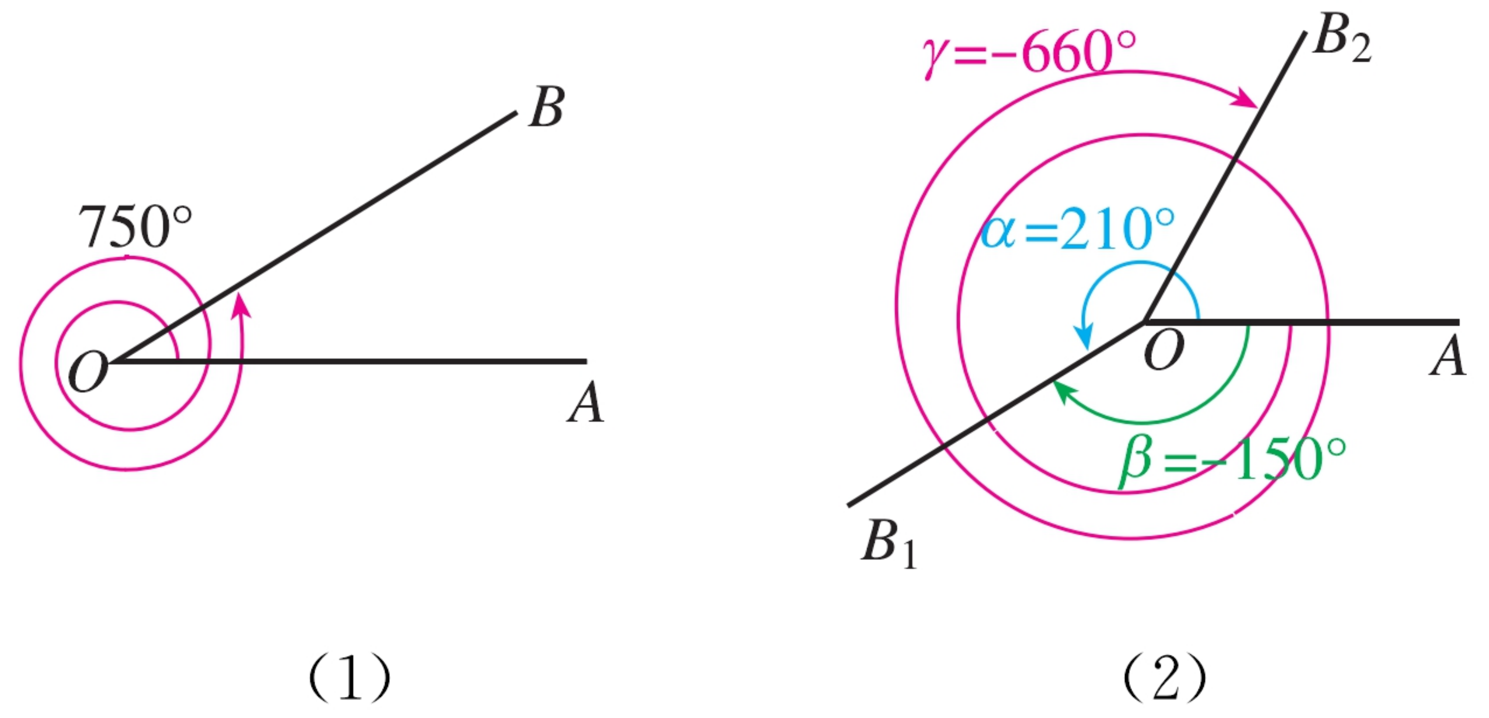
如果一条射线没有作任何旋转，则称它形成了一个零角.

这样，我们就把角的概念推广到了任意角.



二、角的概念

例如，图(1)中所示的角是750°，图(2)中三个角分别是$\alpha=210°$，$\beta=-150°$，$\gamma=-660°$.

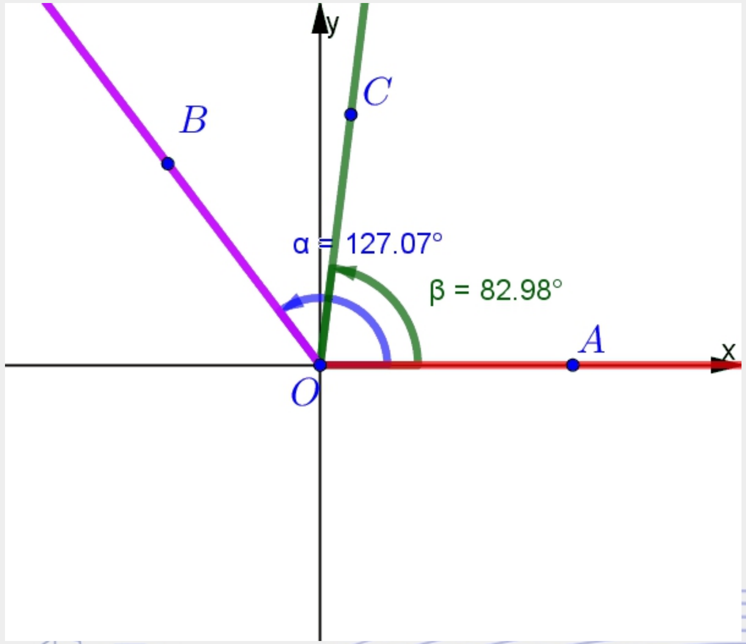


二、角的概念

5．等角：角α与角β旋转方向相同，且旋转量相等，则称$\alpha = \beta$.

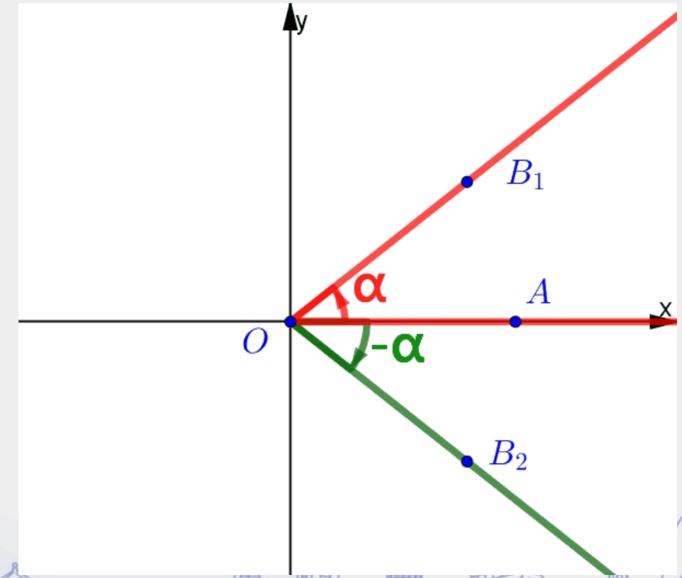
二、角的概念

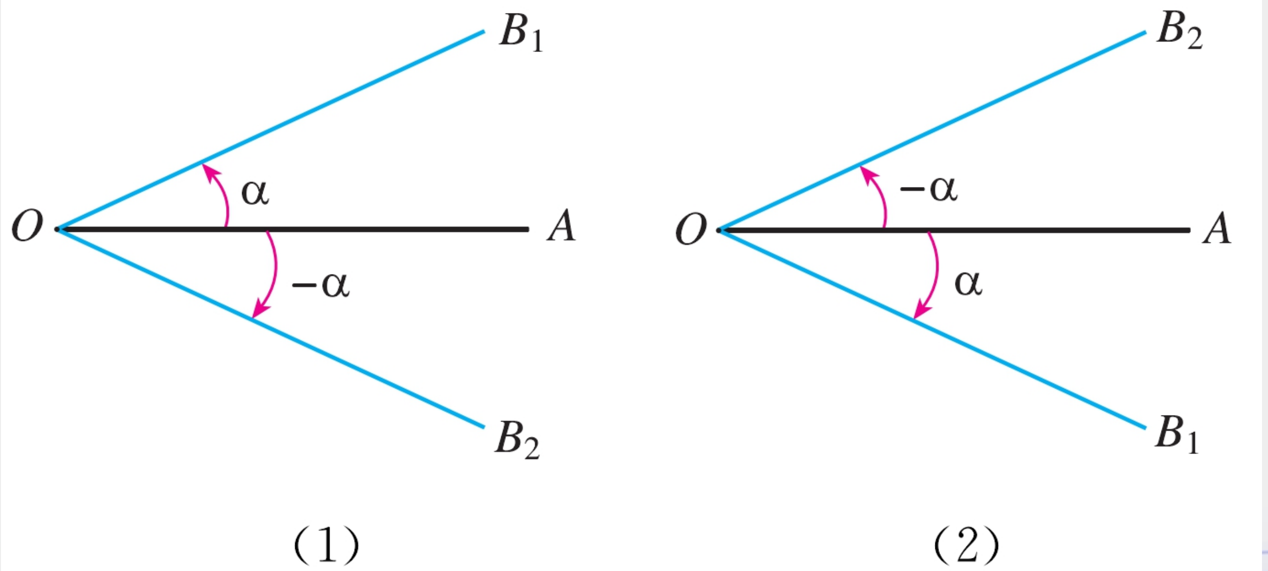
6．角的加法：设 α、β是任意两个角，我们规定，把角α的终边旋转角β，这时终边所对应的角是$\alpha+\beta$.



二、角的概念

7．相反角与角的减法：把射线OA绕端点O按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫做互为相反角(如下图)．角α的相反角记为 $-\alpha$．我们有$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.





三、象限角

1．思考1：为了进一步研究角的需要，我们常在直角坐标系内讨论角，并使角的顶点与原点重合，角的始边与x轴的非负半轴重合，那么对一个任意角，角的终边可能落在哪些位置？

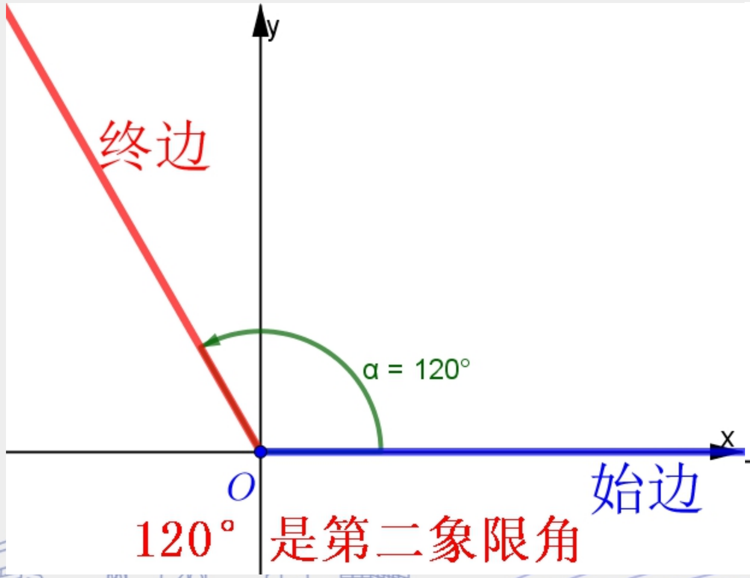
答：对一个任意角，角的终边可能落在某个象限或坐标轴上.

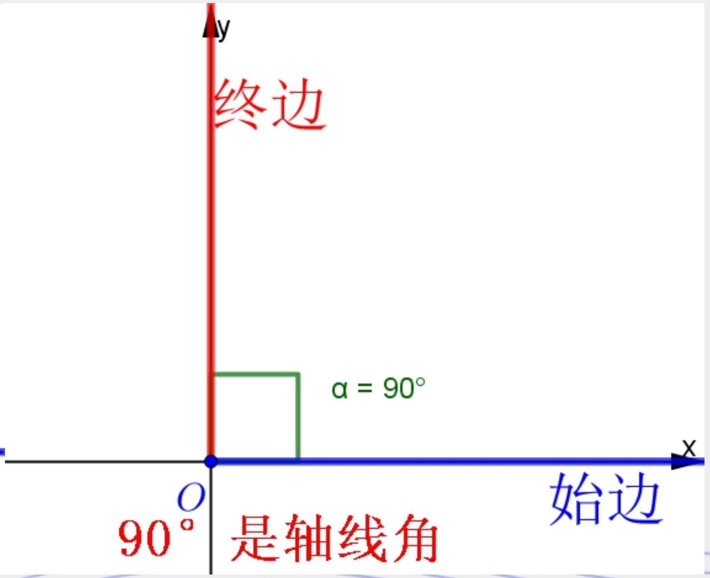
三、象限角

2．象限角、轴线角的定义：

如果角的终边在第几象限，我们就说这个角是第几象限的角；

如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限，或称这个角为轴线角.





三、象限角

3．思考2：

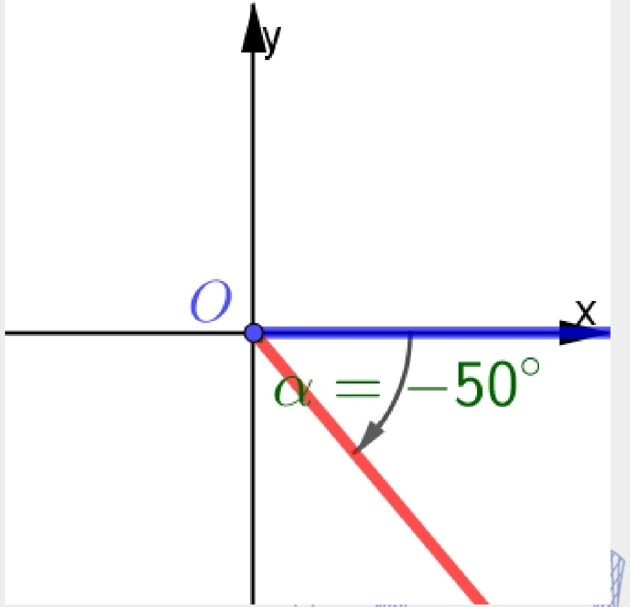
判断下列角是象限角还是轴线角：-50°，405°，-450°，

如果是象限角，请指出是第几象限角；

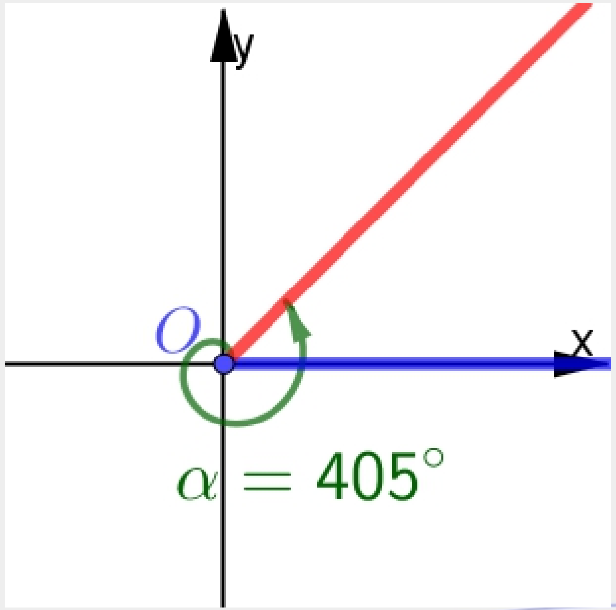
如果是轴线角，请指出其终边在哪个轴上．

三、象限角

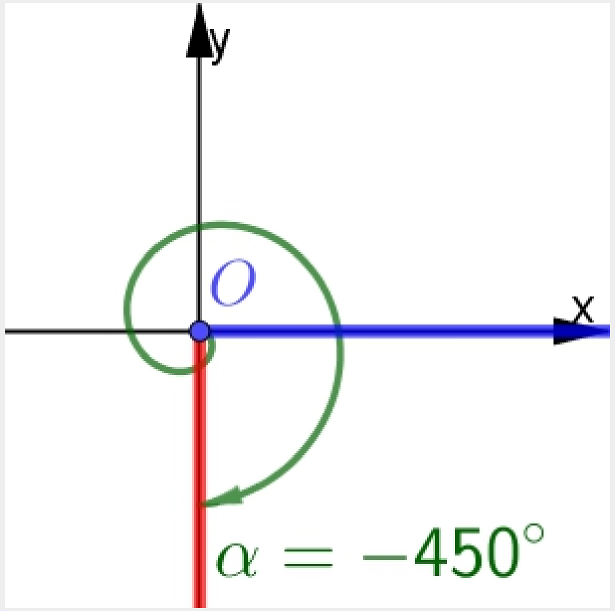
答：画出图形，可以知道：－50°是第四象限角，405°是第一象限角，－450°是轴线角（角的终边在y轴负半轴）．



-50°



405°

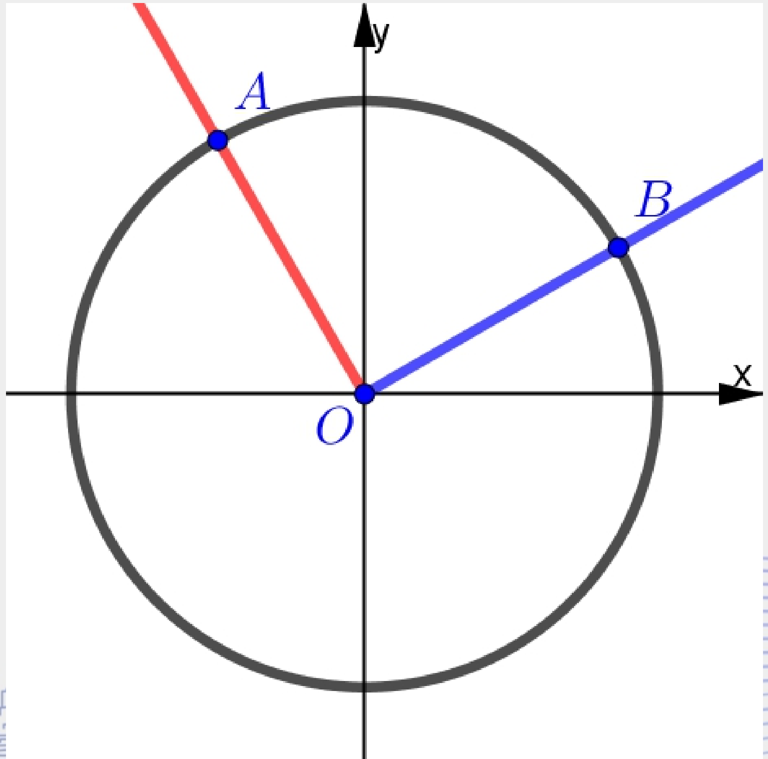


-450°

三、象限角

4．思考3：第二象限角一定比第一象限角大吗？

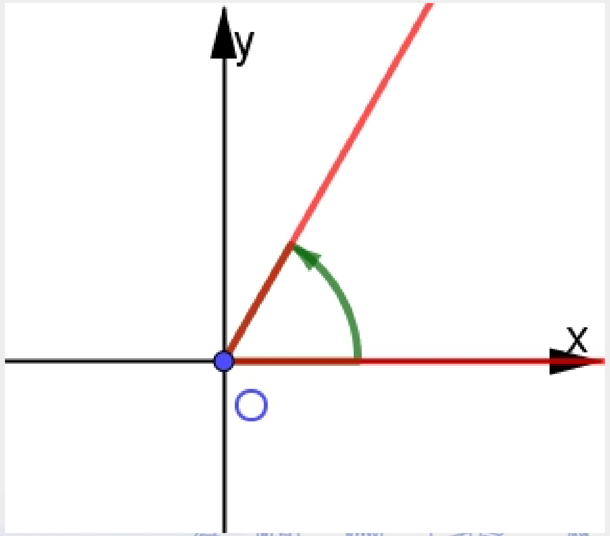
答：不一定．例如，120°是第二象限角，390°是第一象限角，但120°＜390°．

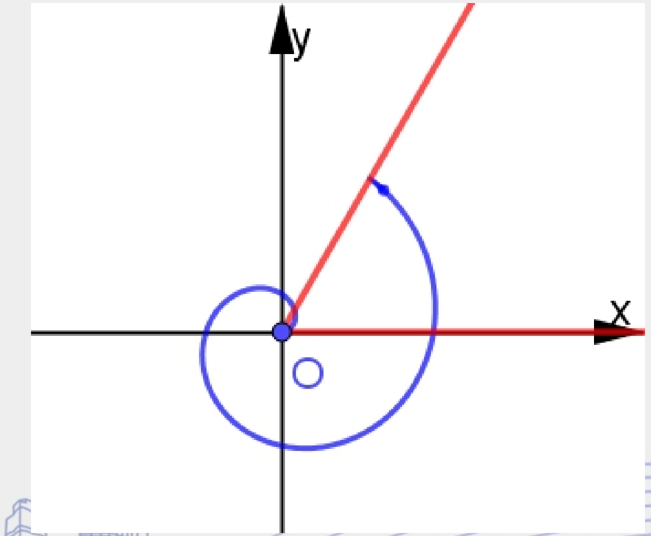


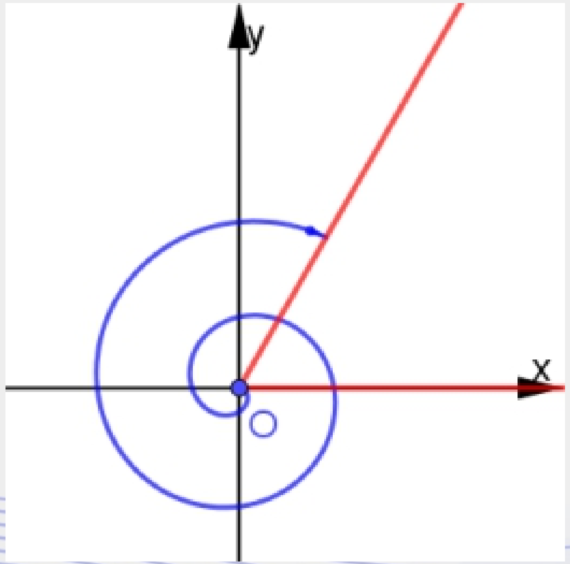
四、终边相同的角

1．请画出下列角：$\alpha = 60^\circ$，$\beta = 420^\circ$，$\gamma = -660^\circ$，你发现这三个角的终边有何联系？

答：可以发现，这三个角终边相同.





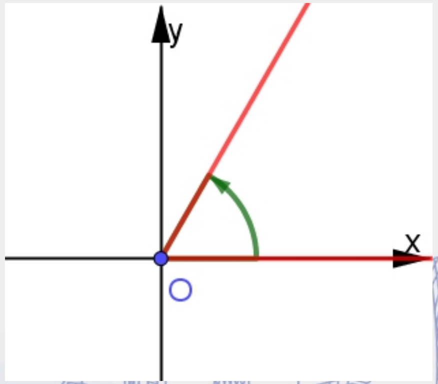


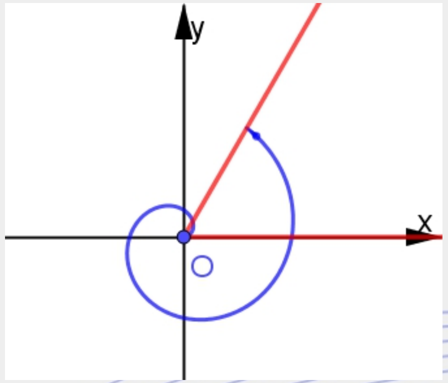
四、终边相同的角

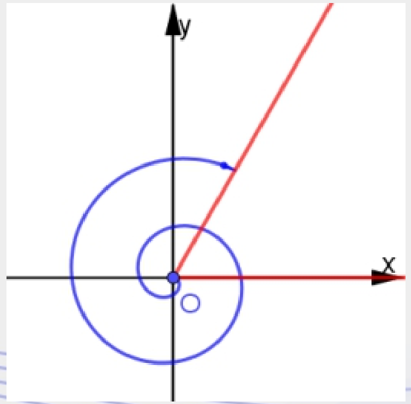
2．思考1：对于终边相同的角$\alpha=60^\circ$，$\beta=420^\circ$，$\gamma=-660^\circ$，你发现这三个角在**数量上**有什么关系？

答：发现它们相差整数个360°．

如，$420^\circ=60^\circ+360^\circ$，$-660^\circ=60^\circ-2\times360^\circ$．







四、终边相同的角

2．思考2：所有与60°角终边相同的角，连同60°角在内，可构成一个集合S，你能用描述法表示集合S吗？

$$\{\beta|\beta=60^{\circ}+k\times360^{\circ},\ k\in\mathbf{Z}\}$$

四、终边相同的角

3．思考3：一般地，所有与角α终边相同的角，连同角α在内所构成的集合S可以怎样表示？

$$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\times 360^{\circ}，k\in\mathbf{Z}\}$$

即任一与角α终边相同的角，都可以表示成角α与整数个周角的和.

五、典型例题

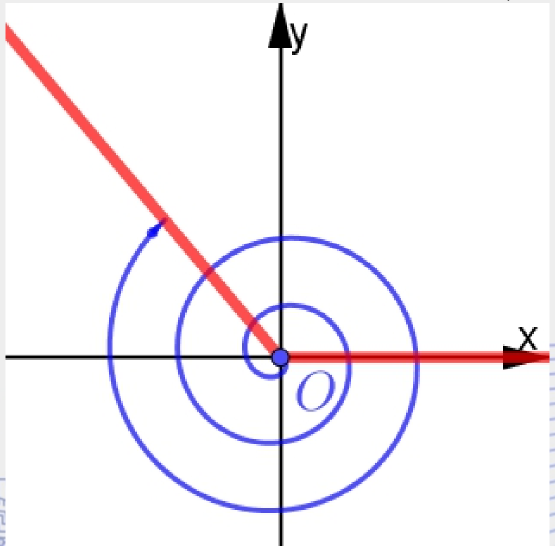
例1．在$0^\circ \sim 360^\circ$范围内，找出与$-950^\circ 12'$角终边相同的角，并判断它是第几象限角.

分析：将$-950^\circ 12'$加上整数个360°，将其转化为$0^\circ \sim 360^\circ$范围内的角.

五、典型例题

例1．在0°~360°范围内，找出与－950°12′角终边相同的角，并判断它是第几象限角.

解：－950°12′＋3×360° ＝129°48′，所以在0°~360°范围内，与－950°12′角终边相同的角是129°48′，它是第二象限角.

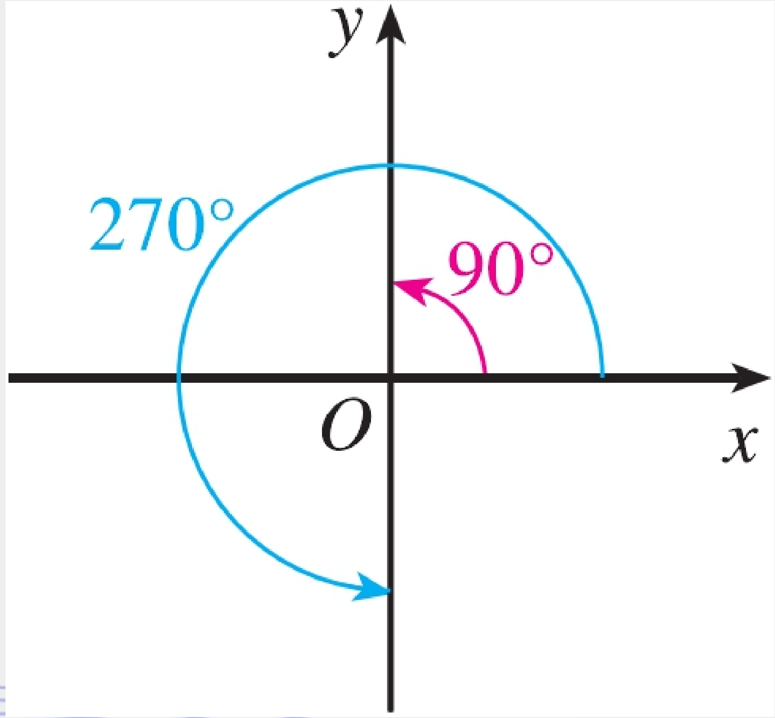


五、典型例题

例2．写出终边在y轴上的角的集合．

分析：在0°~360°范围内，终边在y轴上的角有两个：90°，270°角．

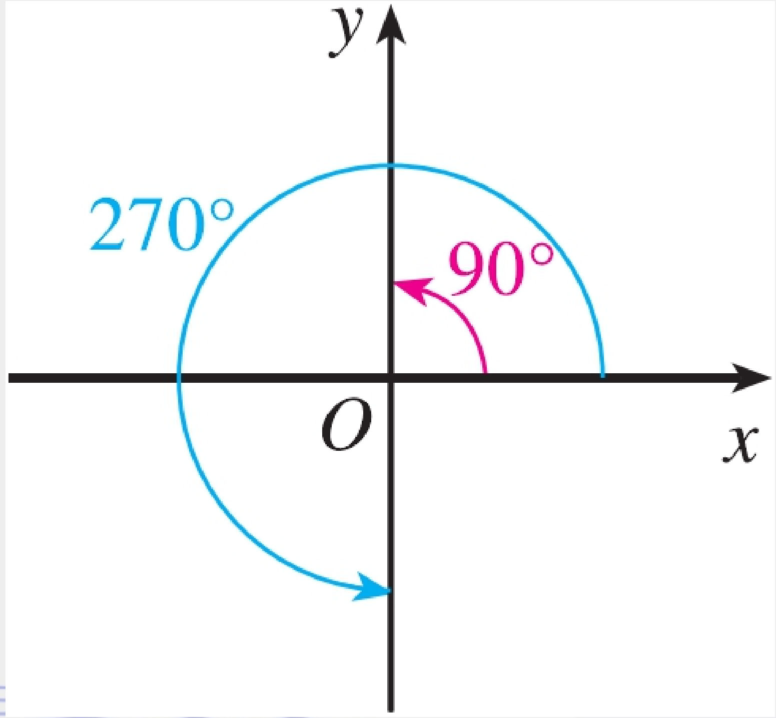
可以先写出两个集合，再取它们的并集．



五、典型例题

例2．写出终边在y轴上的角的集合．

解：在0°~360°范围内，终边在y轴上的角有两个：90°，270°角（如图）．



与90°终边相同的角构成集合S_1 = $\{\beta|\beta=90°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$，

与270°终边相同的角构成集合S_2 = $\{\beta|\beta=270°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在y轴上的角的集合$S = S_1\cup S_2$，

五、典型例题

$S = S_1 \cup S_2$

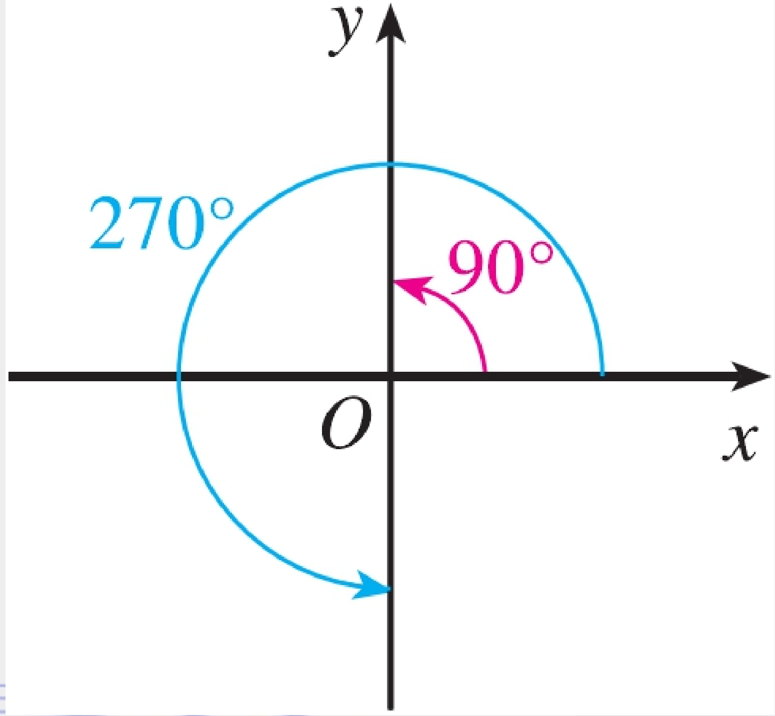
$=\{\beta|\beta=90^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$

$\cup\{\beta|\beta=270^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\beta|\beta=90^\circ+2k\cdot 180^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$

$\cup\{\beta|\beta=90^\circ+(2k+1)\cdot 180^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\beta|\beta=90^\circ+n\cdot 180^\circ, n\in\mathbf{Z}\}$.



五、典型例题

例3．写出终边在直线$y=x$上的角的集合S．S中满足不等式$-360°\leqslant\beta<720°$的元素β有哪些？

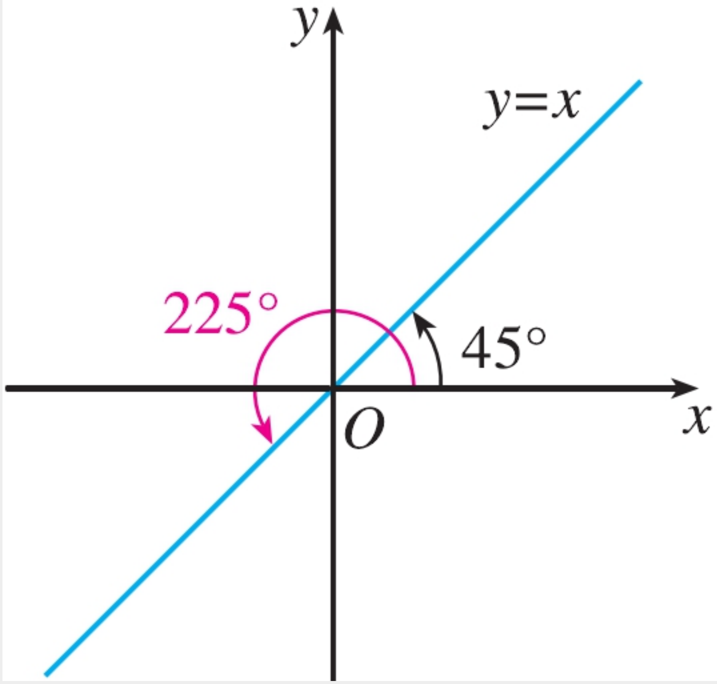
分析：

先求出终边在直线$y=x$上的角的集合

（含字母n，$n\in\mathbf{Z}$）；

再让n取部分整数，来检验元素β

是否满足不等式$-360°\leq\beta<720°$．



五、典型例题

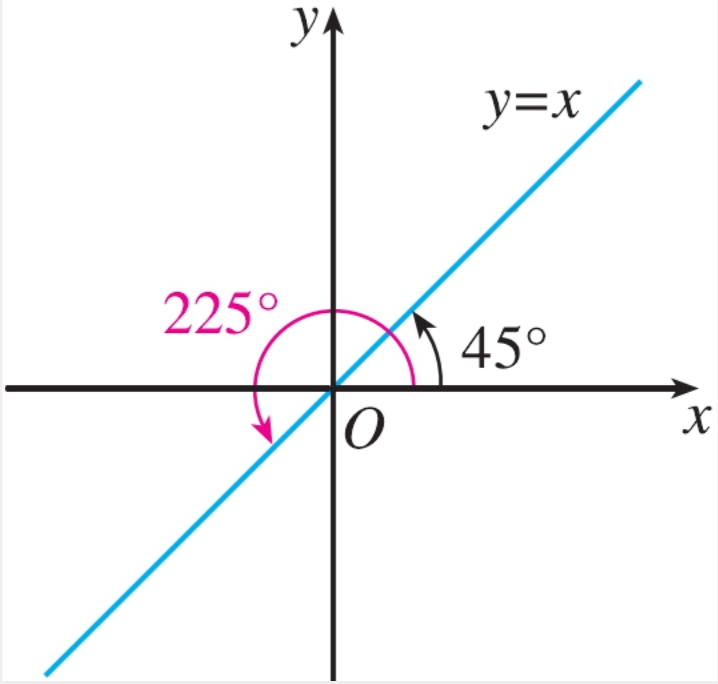
例3．写出终边在直线$y=x$上的角的集合S．S中满足不等式$-360°\leqslant\beta<720°$的元素β有哪些？

解：终边在直线$y=x$上的角的集合

$S=\{\beta|\beta=45°+k\cdot360°，k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=225°+k\cdot360°，k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\beta|\beta=45°+2k\cdot180°，k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=45°+(2k+1)\cdot180°，k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\beta|\beta=45°+n\cdot180°，n\in\mathbf{Z}\}$.



五、典型例题

即$S=\{\beta|\beta=45°+n\cdot180°, n\in\mathbf{Z}\}$.

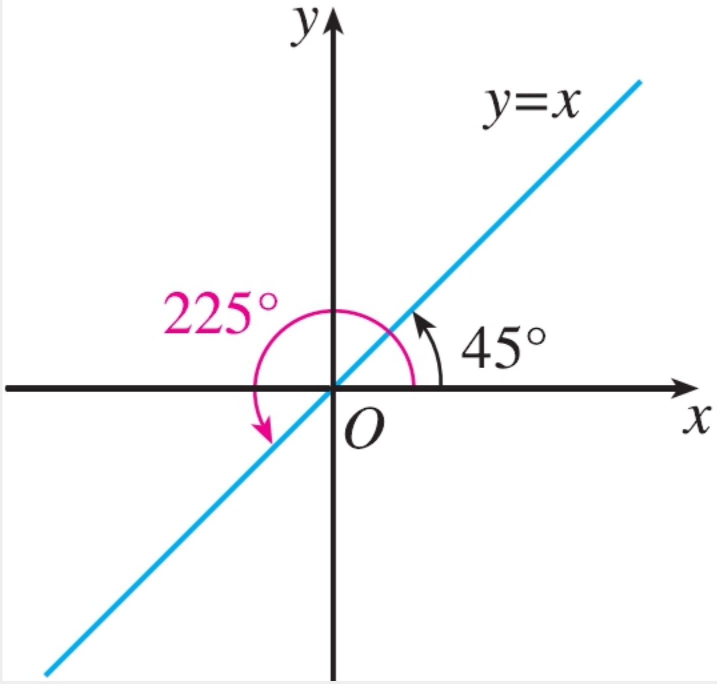
经计算，当n分别取

-2、-1、0、1、2、3时，

可得S中满足不等式$-360°\leqslant\beta<720°$的元素β：

$-315°$、$-135°$、$45°$、

$225°$、$405°$、$585°$.



六、变式

变式．若α是第一象限角，则$\alpha/2$是第几象限角？

分析：

先用含不等式的集合来表示角，

再根据不等式的性质，求出$\alpha/2$的范围，

最后根据范围，判断$\alpha/2$的终边的位置.

六、变式

变式．若α是第一象限角，则$\alpha/2$是第几象限角？

解：终边在第一象限的角的集合是

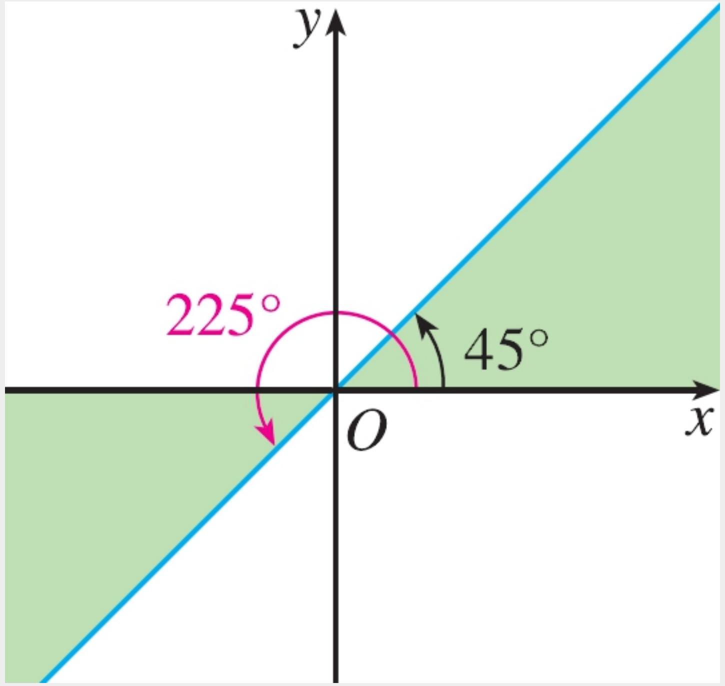
$S=\{\alpha|k\cdot 360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in \mathbf{Z}\}$，

故$k\cdot 180^\circ<\alpha/2<45^\circ+k\cdot 180^\circ,\ k\in \mathbf{Z}$，

k是偶数时，$\alpha/2$是第一象限角，

k是奇数时，$\alpha/2$是第三象限角，

从而，$\alpha/2$是第一、三象限角．



七、总结

1．通过本节课的学习，我们体会到了引入任意角的必要性；

2．学习了正角、负角、零角、终边相同的角、轴线角、象限角等概念；

3．通过三个例题，学会了用集合语言来研究角．

八、作业

完成配套的目标检测题.

谢谢收看，同学们再见！

共享课堂

高一-人教A版-数学-必修一-第五章

5.1.1 任意角答疑课程

广州市第四中学 刘运科

广州教育

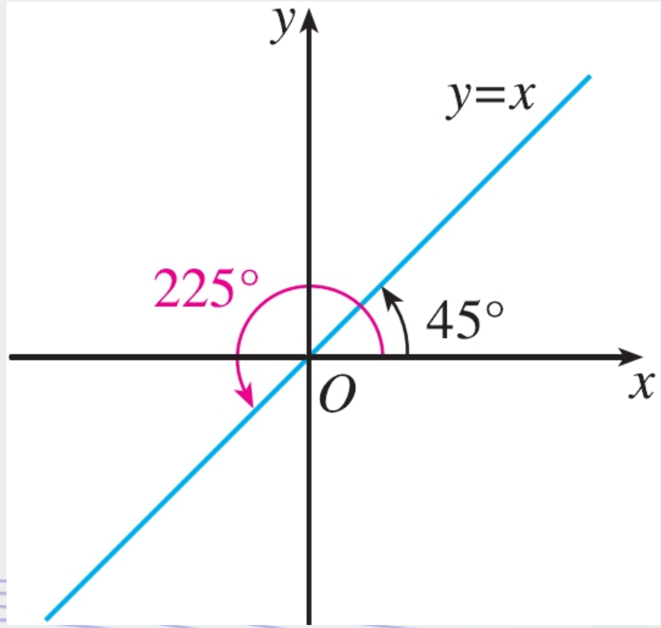
难点

- 难点1：怎样判断角的终边在第几象限？
- 答：通过加、减整数个360°，将其转化为0°~360°内的角，再进行判断.
- 【例】－1234°是第几象限角？
- 【答】－1234°+3×360°=－154°，可以判断其为第三象限角.（或：－1234°+4×360°=206°，可以判断其为第三象限角.）

难点

- 难点2：为什么终边落在某条直线上的角的集合，会出现$k\cdot 180°$，而不是$k\cdot 360°$？
- 答：直线由两条射线组成，终边落在这两条射线上的两个角，恰好相差整数个180°.
- 【例】终边落在直线$y=x$上的两个角的

集合为 $\{\beta|\beta=45°+n\cdot 180°, n\in Z\}$.



易错点

- 易错点1：注意逆时针旋转得到正角.
- 易错点2：写角的集合时，注意不要遗漏$k\in \mathbf{Z}$、$n\in \mathbf{Z}$等.

易错点

- 易错点3：锐角、第一象限角，它们的关系是怎样的？

答：锐角的取值范围是$(0°, 90°)$，

第一象限角的集合是$S=\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<90°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$，

锐角一定是第一象限角，第一象限角未必是锐角.

谢谢收看，同学们再见！