5.1.2 弧度制

广州市第四中学 蔡睿

一、学习目标

1.理解弧度制的定义，体会引入弧度制的必要性和合理性，培养数学抽象素养.

2.能进行弧度与角度的互化，熟悉特殊角的弧度制，培养逻辑推理、数学运算素养.

3.掌握弧度制中扇形的弧长和面积公式，体会弧度制下公式形式的简洁性，会应用公式解决简单的问题，培养数学运算、数学模型素养.

二、类比引入

度量质量：
千克、磅.

二、类比引入

男鞋 · 尺码对照表

US美码	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10.5	11	11.5
EUR欧码	39	40	40.5	41	42	42.5	43	44.5	45	45.5
CHN中国码	245	250	250	255	260	265	270	275	280	285
脚长(CM)	24.2	24.7	25.1	25.5	25.9	26.3	26.8	27.6	28.0	28.5

度量长度：米、码、英尺.

不同的单位制，能给解决问题带来方便，

那角的度量是否有不同的单位制？

二、类比引入

问题：1° 的角是如何定义的？

1° 的角=周角的 $\frac{1}{360}$ ——以角量角

这种用度做单位，来度量角的制度叫做角度制.

二、类比引入

在数学发展史上，角度制有何局限性？

因为角度是六十进制，而实数是十进制

1.在三角函数的研究中，自变量不能对应到实数集，不符合函数定义的要求；

2.在出现自变量与函数值的运算时，如$\begin{cases} x=r(\cos\theta+\theta\sin\theta) \\ y=r(\sin\theta-\theta\cos\theta) \end{cases}$，

此时 $\theta\sin\theta,\theta\cos\theta$ 的意义就不得知了；

3.在微积分的研究中，角度制也会让重要结论失去意义！

二、类比引入

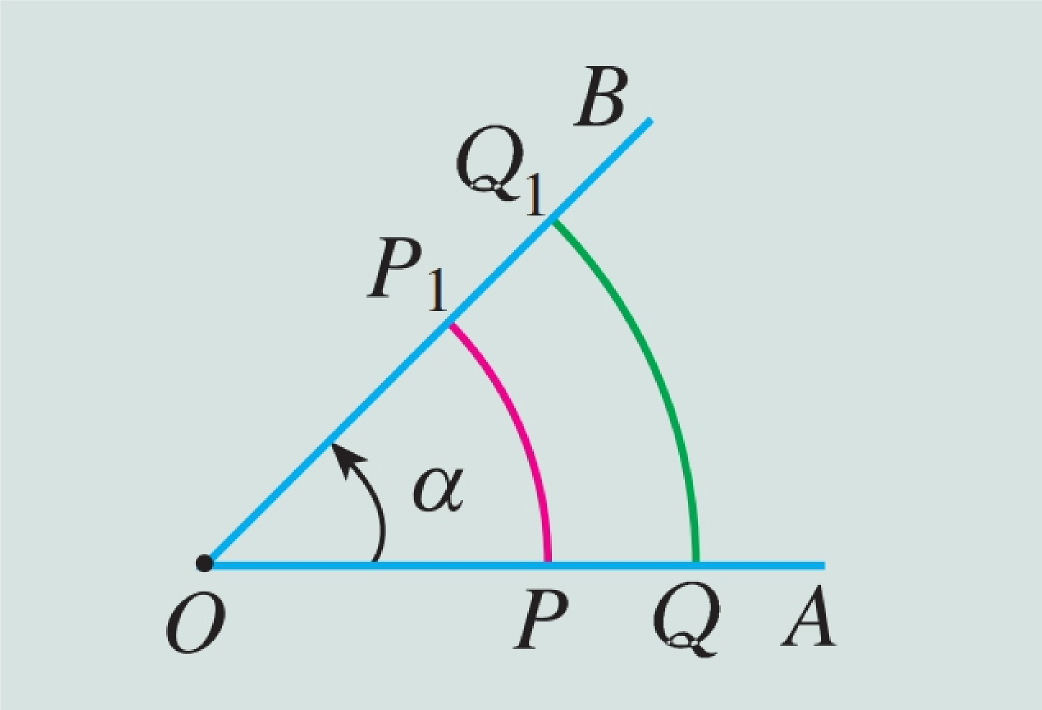
六十进制的角度制不利于后续的研究，所以，很有必要引入十进制的度量制：

弧度制

思考：还可以用什么来度量角？

三、探索新知——弧度的概念

步骤一：射线OA绕端点O旋转到OB形成角α，在旋转过程中，射线OA上的一点P(不同于点O)的轨迹，是一条圆弧，这条圆弧对应于圆心角α.



步骤二：在射线OA上任取一点Q(不同于点O)，$OQ=r_1$，在旋转过程中，点Q所形成的圆弧的长为l_1，

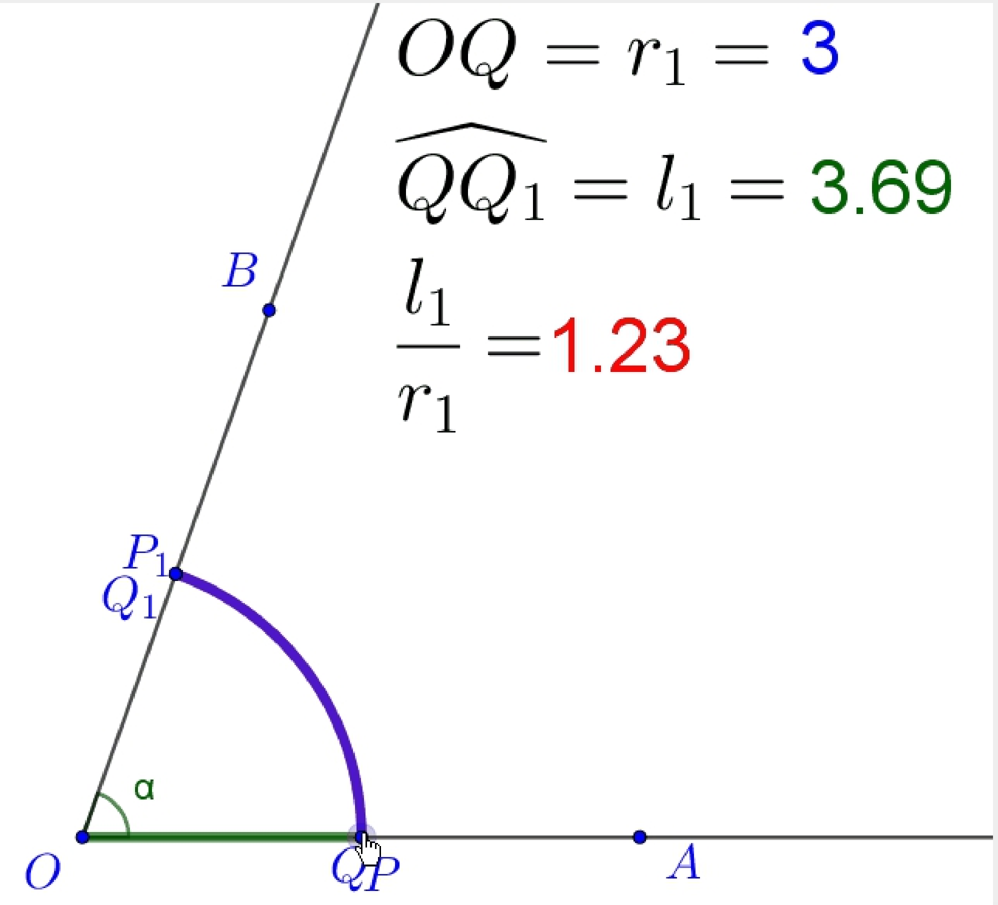
问：l_1与r_1的比值是多少？你能得出什么结论？

三、探索新知——弧度的概念

<u>步骤二：</u>在射线OA上任取一点Q(不同于点O)，OQ=r_1，在旋转过程中，点Q所形成的圆弧的长为l_1，

问：l_1与r_1的比值是多少？你能得出什么结论？

得出猜想：角的大小一定，圆心角所对的弧长与半径的比值也唯一确定.



三、探索新知——弧度的概念

猜想：角的大小一定，圆心角所对的弧长与半径的比值也唯一确定.
但如何证明？

初中学的与弧长公式 $l=\dfrac{n\pi r}{180}$

变形得 $\dfrac{l}{r}=\dfrac{n\pi}{180}$ 只与圆心角的大小有关

即：角的大小一定，圆心角所对的弧长与半径的比值也唯一确定.

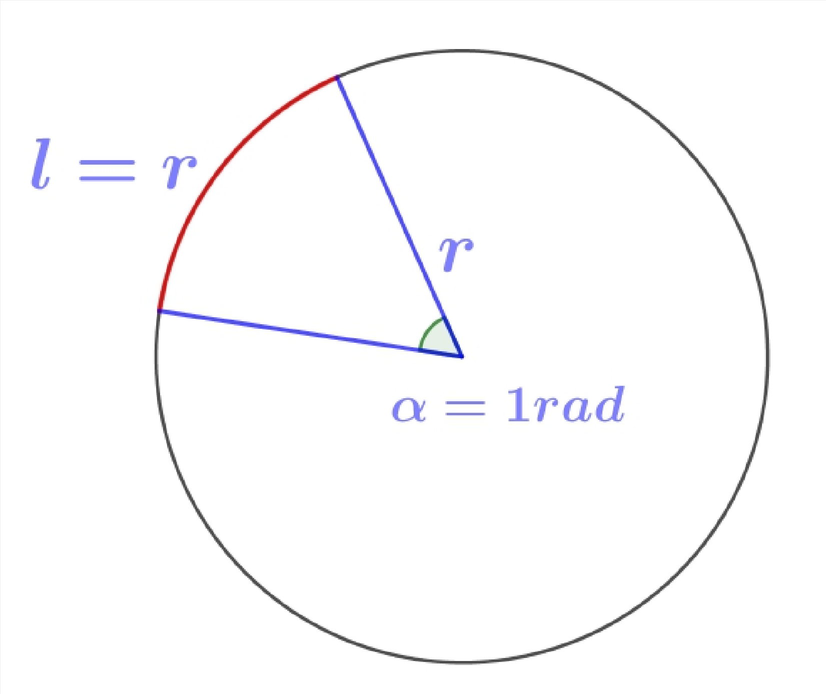
猜想成立√

可以利用“圆的弧长与半径的关系”度量角，这就是弧度制.

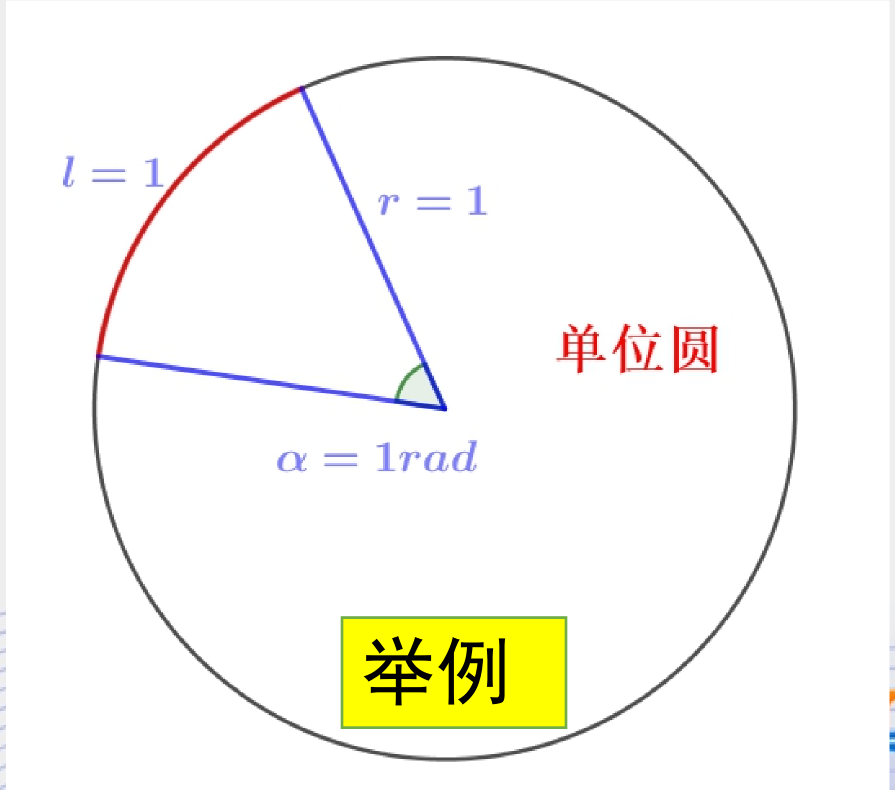
三、探索新知——1弧度的角多大？

规定：1弧度的角——长度等于半径长的圆弧所对的圆心角.

弧度单位：用rad表示，读作弧度.



几何表示



举例

三、探索新知——弧度的概念

思考 1：圆的半径为 r，弧长分别为 2r、πr，则它们所对圆心角的弧度数是多少？

【答案】2rad，π rad.

分析：弧长r→1rad

弧长2r→2rad

弧长πr→π rad

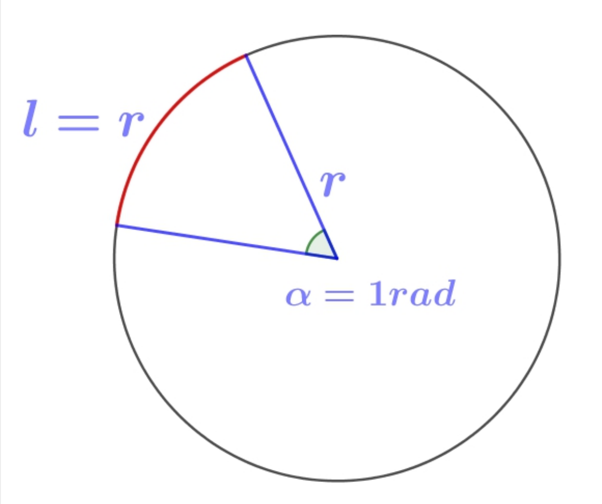
思考 2：在半径为 r 的圆中，弧长为 l 的弧所对的圆心角为 α，那么，角 α 的弧度数的绝对值如何计算？

【答案】$|\alpha|=\dfrac{l}{r}$

三、探索新知——弧度的概念

代数表示：α的弧度数的绝对值为$|\alpha|=\dfrac{l}{r}$

其中，α的正负由角α的终边的旋转方向决定.
即：逆时针旋转为正，顺时针旋转为负.



当角的终边旋转一周后，继续旋转，就可以得到弧度数大于2π或小于-2π的角，这样就可以得到幅度为任意大小的角.

约定：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，
零角的弧度数为0.

三、探索新知——角度与弧度的换算

思考3：一个周角以度为单位度量是多少度？$360°$

以弧度为单位度量是多少弧度？$\alpha=\dfrac{l}{r}=\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi\ \mathrm{rad}$

由此可得角度与弧度有怎样的换算关系？

$360°=2\pi\ \mathrm{rad}$

$\boxed{180°=\pi\ \mathrm{rad}}$ 熟记

思考4：根据上述关系，1°等于多少弧度，1 rad等于多少度？

$1°=\dfrac{\pi}{180}\mathrm{rad}\approx 0.01745\mathrm{rad}$ ← $180°=\pi\ \mathrm{rad}$

$1\mathrm{rad}=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°$

四、典型例题

例 1．把 $67°30'$化为弧度。

(1)精确值；　　（2）精确到 0.001 的近似值

解：(1) 因为$67^{\circ}30' = (\frac{135}{2})^{\circ}$，$180^{\circ} = \pi \ rad$

$\therefore 1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \ rad$

所以$67^{\circ}30' = \frac{135}{2} \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{3\pi}{8} rad$

四、典型例题

例 1．把下列 67°30′化为弧度。

(1)精确值；　　（2）精确到 0.001 的近似值

（2）法一：$\frac{3\pi}{8}rad \approx \frac{3}{8}\times 3.14 \approx 1.178\,\text{rad}$

法二：直接用计算器

利用计算器有

SHIFT 菜单 设置 2 2

6 7 °′″ 3 0 °′″ OPTN 2 1 = S⇔D 1.178 097 245.

因此，67°30′≈1.178 rad.

四、典型例题

例2．把下列各角的弧度化为角度数

(1) 2 rad (精确到0.1)　　(2) $-\frac{\pi}{3}rad$

解：(1) $\because \pi\ rad=180^\circ$　　$\therefore 1\ rad=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.30^\circ$

$\therefore 2\ rad\approx 2\times 57.3^\circ=114.6^\circ$

(2) $\because \pi\ rad=180^\circ$　　$\therefore -\frac{\pi}{3}\ rad=-\frac{1}{3}\times 180^\circ=-60^\circ$

小结：熟记π rad=180°，并能够快速单位化，有时需要整体代入

四、典型例题

例 3 填写下列表中特殊角的度数.

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

小结

1.角度制与弧度制互化时熟记π rad=180°，并能够快速单位化，有时需要整体代入.

2.用弧度数表示角时，常常把弧度数写成多少π的形式，不必写成小数.

3.用弧度制表示角时，“弧度”二字或“rad”通常略去不写，只写该角所对应的弧度数.

4.弧度与角度不能混用，即不能出现这样的形式：$30^\circ+\frac{\pi}{6}$

小结

5.角与实数的对应关系：

每一个角都有一个弧度数

即每一个角：都对应着唯一一个实数

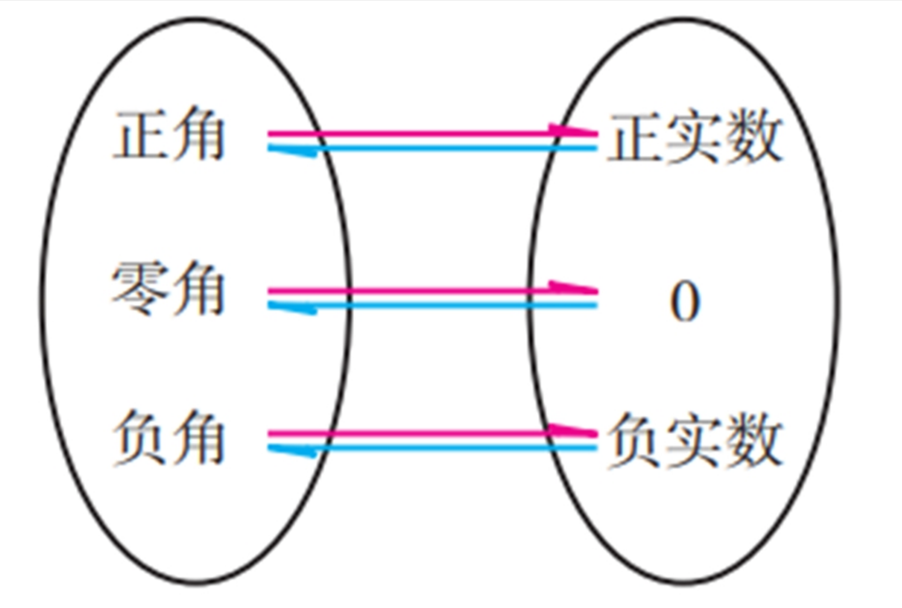
反过来

每一个实数：也对应着一个角(以这个实数为弧度数的角)

即：任意角的集合与实数集R建立了一一对应的关系

小结

角的概念推广后，角与实数之间建立了一一对应关系，



任意角的集合　　实数集 R

共享课堂

四、典型例题

例 4.利用弧度制证明下列扇形的公式：

(1) $l=\alpha R$　　(2) $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$　　(3) $S=\frac{1}{2}lR$

其中 R 是扇形的半径，l 是弧长，α $(0<\alpha<2\pi)$为圆心角，S 是扇形的面积.

α是弧度为单位

证明：由公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 可得

$l=\alpha R$.

广州教育

共享课堂

(2) $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$　　(3) $S=\frac{1}{2}lR$

下面证明（2)(3).

半径为 R，圆心角为 $n°$的扇形的弧长公式和面积公式分别是

$$l=\frac{n\pi R}{180},\quad S=\frac{n\pi R^2}{360},$$

将 $n°$转换为弧度，得

$\because 1°=\frac{\pi}{180}\ rad$

$$\alpha=\frac{n\pi}{180},$$

α是弧度为单位

于是，

$$S=\frac{1}{2}\alpha R^2.$$

将 $l=\alpha R$ 代入上式，即得

$$S=\frac{1}{2}lR.$$

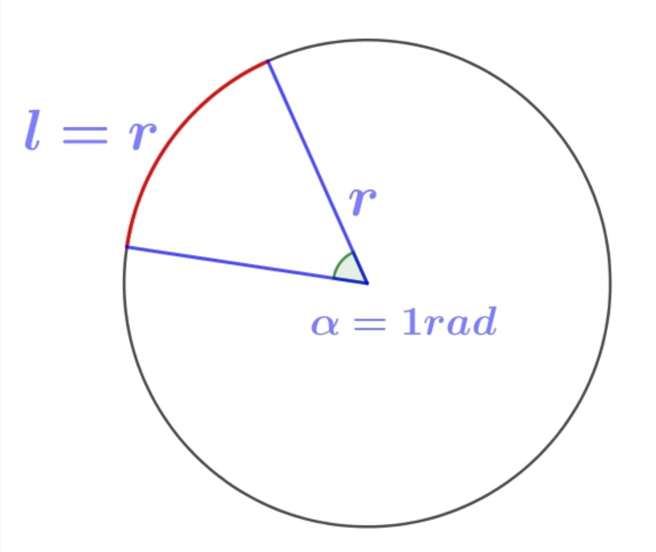
广州教育

五、归纳总结

1.弧度制

(1)定义：1弧度的角——长度等于半径长的圆弧所对的圆心角.

(2)几何表示：



(3)代数表示：$|\alpha| = \dfrac{l}{r}$

共享课堂

五、归纳总结

2.角度制与弧度制的区别与联系；

	弧度制	角度制
区别	十进制	六十进制
	1弧度=长度等于半径长的圆弧所对的圆心角	1° =周角的360分之一
联系	都与半径大小无关	

3.角度与弧度的换算：熟记$180^{\circ}=\pi$

4.扇形的弧长公式与面积公式：

(角α先化为弧度制) $l=\alpha R$, $S=\frac{1}{2}\alpha R^{2}$, $S=\frac{1}{2}lR$

广州教育

六、作业

完成配套的目标检测题

共享课堂

谢谢收看，同学们再见！

广州教育

共享课堂

高一-人教A版-数学-必修第一册-第五章

5.1.2 弧度制答疑

广州市第四中学 蔡睿

广州教育

难点

难点：角$\alpha=3$是什么意思？是3°吗？

答：省略了弧度单位，是指3 rad的角.
弧度单位rad可以省略，角度单位°不能省略.
建议熟记1rad≈57.3°来估计角的大小.

难点

例如：判断角$\alpha=2$，$\beta=4$分别是第几象限角.

错解： α，β都是第一象限角.

正解： $\alpha=2\ \text{rad}\approx2\times57.3°=114.6°$，是第二象限角.

$\beta=4\ \text{rad}\approx4\times57.3°=229.2°$，是第三象限角.

易错点

易错点1：弧度与角度不能混用，即不能出现这样的形式:

$$30^\circ+\frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{\pi}{3}+k\cdot 360^\circ \text{ 或 } 30^\circ+2k\pi$$

易错点2：使用以下公式，要先把角的单位转换为弧度，

$$l=\alpha R,\quad S=\frac{1}{2}\alpha R^2$$

易错点

例：半径为2cm的圆中，150°的圆心角所对的弧的长度为____________

错解：$l=\alpha R=150° \times 2=300\text{cm}$

正解：$\alpha=5\pi/6$，则$l=\alpha R=(5\pi/6)\times 2=5\pi/3$ cm

共享课堂

谢谢收看，同学们再见！

广州教育