

高二数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围：集合、复数、函数、导数、解三角形、三角函数。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | -4 < x - 1 < 5\}$, $B = \{x | x^2 > 4\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | 2 < x < 6\}$
 B. $\{x | -3 < x < 6\}$
 C. $\{x | -2 < x < 2\}$
 D. $\{x | -3 < x < -2 \text{ 或 } 2 < x < 6\}$

2. 若复数 $z = \frac{5-i}{1-i}$, 则 $|z-1| =$

- A. $2\sqrt{2}$ B. 8 C. $\sqrt{10}$ D. 10

3. 下列各组函数中表示的函数不同的是

- A. $f(x) = x, g(x) = \sqrt[3]{x^3}$ B. $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = |x|$
 C. $f(x) = x^2 - 3x, g(t) = t^2 - 3t$ D. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, g(x) = x + 2$

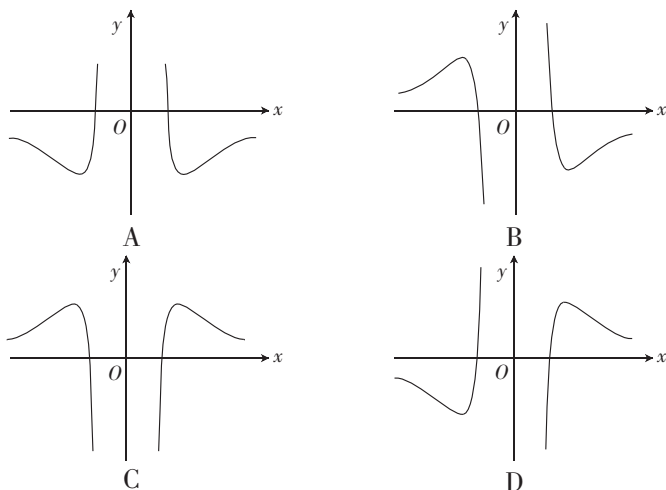
4. 若 $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) =$

- A. $\frac{24}{25}$ B. $-\frac{24}{25}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $-\frac{7}{25}$

5. 若函数 $y = -\cos(x + \varphi)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数，则实数 φ 的值可以为

- A. $\frac{5\pi}{2}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $-\frac{5\pi}{4}$ D. -3π

6. 函数 $f(x) = \frac{-x^2 + 0.25}{x^4}$ 的部分图象大致为



7. “ $a > 2$ ”是“函数 $f(x) = (x-a)e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有极值”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 函数 $f(x) = \cos \omega x (\omega > 0)$ 在 $x \in (0, \frac{2\pi}{3})$ 上是减函数, 那么 ω 的值可以是

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 3 D. 4

9. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 1 \\ a + \left(\frac{1}{4}\right)^x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 $(a, +\infty)$, 则 a 的取值范围为

- A. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $\left(\frac{1}{4}, 1\right]$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x| + 1, & x > 0 \\ x + 4, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $y = f(f(x)) - 3$ 的零点个数为

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $a \in \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right)$, $b = 1$, 且满足 $ab \cos C + c \cos A = abc$, 则 $\cos B$ 的取值范围为

- A. $\left(\frac{7}{12}, \frac{3}{4}\right]$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ D. $\left(\frac{7}{12}, \frac{3}{4}\right)$

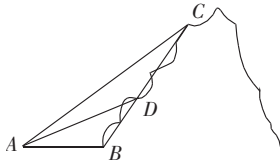
12. 设函数 $f(x) = xe^{\frac{x}{2}} + \frac{6m}{5x} - 2m$, 对任意正实数 x , $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围为

- A. $[0, 2e^2]$ B. $\left[0, \frac{9}{2}e^{\frac{3}{2}}\right]$ C. $[0, 2e]$ D. $\left[0, \frac{5}{4}e^{\frac{1}{2}}\right]$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $\tan \alpha=3, \tan \beta=2$, 则 $\tan(\alpha-\beta)$ 等于 _____.

14. 如图, 嵩山上原有一条笔直的山路 BC , 现在又新架设了一条索道 AC , 小李在山脚 B 处看索道 AC , 发现张角 $\angle ABC=120^\circ$; 从 B 处攀登 4 千米到达 D 处, 回头看索道 AC , 发现张角 $\angle ADC=150^\circ$; 从 D 处再攀登 8 千米方到达 C 处, 则索道 AC 的长为 _____ 千米.



15. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则满足 $f(\ln x-1) > f(-1)$ 的 x 的取值范围是 _____.

16. 已知函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b, x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1)=f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 则 $x_1+2x_0=$ _____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=-\sqrt{3} \cos \frac{1}{3} x-\sin \frac{1}{3} x+3$.

(1) 求 $f(x)$ 图象的对称轴方程;

(2) 求 $f(x)$ 的最小值及此时自变量 x 的取值集合.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b \sin A \cos C + c \sin A \cos B = a \sin B$.

(1) 证明: $bc=a$;

(2) 若 $c=3, \cos C=\frac{1}{6}$, 求 AC 边上的高.

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}a(a+1)x^2 + 3a^2x + 2(a \neq 0)$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

20. (本小题满分 12 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3} \left(b \sin C - \frac{c \cdot \cos B}{\tan C} \right) = a$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda c^2$, 求实数 λ 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论 $F(x)$ 的单调性.

(2) 当 $a=-1$ 时, $F(x) < \frac{2}{3}x^3$ 在 $(1, +\infty)$ 上是否恒成立? 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - (6a+3)x^2 + 12ax + 16a^2$.

(1) 若 $a=2$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 只有一个零点 x_0 , 且 $x_0 < 0$, 求 a 的取值范围.