学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密封线内不要答题

# 数　学

**一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.**

1. 已知命题 $p$: $\forall x>0$, $\ln(x+1)>0$,则命题 $p$ 的否定是

A. $\forall x>0$, $\ln(x+1)\leqslant 0$　　B. $\forall x\leqslant 0$, $\ln(x+1)>0$

C. $\exists x_0>0$, $\ln(x_0+1)>0$　　D. $\exists x_0>0$, $\ln(x_0+1)\leqslant 0$

2. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$, $B=\{t\in\mathbf{Z}\mid t=2x+1, x\in A\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0\}$

3. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q$,若 $a_2a_6=4a_5^2$,则公比 $q=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

4. 已知 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 均为单位向量,它们的夹角为 $60^\circ$, $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,则下列结论正确的是

A. $\lambda-\mu=0$　　B. $\lambda+\mu=0$　　C. $2\lambda-\mu=0$　　D. $2\lambda+\mu=0$

5. $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中,$x^4$ 的系数是

A. 160　　B. 80　　C. 50　　D. 10

6. 已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,则 $\sin 2\alpha=$

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$　　B. $\frac{2\sqrt{3}-1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$　　D. $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$

7. 唐朝著名的凤鸟花卉纹浮雕银杯如图 1 所示,它的盛酒部分可以近似地看作是半球与圆柱的组合体(如图 2). 当这种酒杯内壁表面积(假设内壁表面光滑,表面积为 $S$ 平方厘米,半球的半径为 $R$ 厘米)固定时,若要使得酒杯的容积不大于半球体积的 2 倍,则 $R$ 的取值范围为

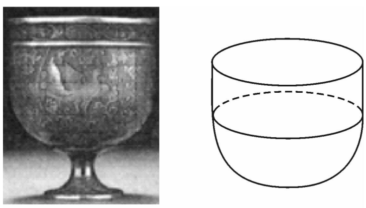


图1　　图2

A. $\left(0,\sqrt{\frac{35}{10\pi}}\right]$　　B. $\left[\sqrt{\frac{3S}{10\pi}},+\infty\right)$

C. $\left(\sqrt{\frac{S}{5\pi}},\sqrt{\frac{3S}{10\pi}}\right]$　　D. $\left[\sqrt{\frac{3S}{10\pi}},\sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)$

8. 已知实数 $a,b$ 满足 $ab>0$，则 $\frac{a}{a+b}-\frac{a}{a+2b}$ 的最大值为

A. $2-\sqrt{2}$　　B. $2+\sqrt{2}$　　C. $3-2\sqrt{2}$　　D. $3+2\sqrt{2}$

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.**

9. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，双曲线 $A$ 的焦点 $F$ 位于 $x$ 轴上，且双曲线 $A$ 与双曲线 $B$：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 有相同渐近线，则下列结论正确的是

A. 双曲线 $A$ 与双曲线 $B$ 的离心率相等

B. 双曲线 $A$ 与双曲线 $B$ 的焦距相等

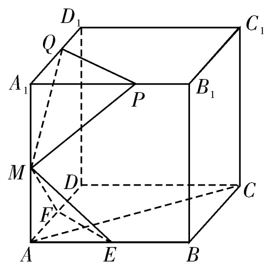
C. 若双曲线 $A$ 的焦点 $F$ 到渐近线距离为 2，则双曲线 $A$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$

D. 若双曲线 $A$ 的焦点 $F$ 到渐近线距离为 2，则双曲线 $A$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

10. 2019 年国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中国队王者归来，6 名队员全部摘金，总成绩荣获世界第一，数学奥林匹克协会安排了分别标有序号为“1 号”“2 号”“3 号”的三辆车，等可能随机顺序前往机场接参赛选手. 某嘉宾突发奇想，设计两种乘车方案. 方案一：不乘坐第一辆车，若第二辆车的车序号大于第一辆车的车序号，就乘坐此车，否则乘坐第三辆车；方案二：直接乘坐第一辆车. 记方案一与方案二坐到“3 号”车的概率分别为 $P_1,P_2$，则下列结论正确的是

A. $P_1<P_2$　　B. $P_1=P_2$　　C. $2P_1=3P_2$　　D. $P_1+P_2=\frac{5}{6}$

11. 如图所示，已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$E,F,M$ 分别是线段 $AB$、$AD$、$AA_1$ 的中点，点 $P$、$Q$ 分别在线段 $A_1B_1$、$A_1D_1$ 上，且 $A_1P=A_1Q=x(0<x<1)$. 设平面 $MEF\cap$ 平面 $MPQ=l$，则下列结论正确的是




A. $l\parallel$ 平面 $ABCD$

B. $l\perp AC$

C. 直线 $l$ 与平面 $BCC_1B_1$ 不垂直

D. 当 $x$ 变化时，$l$ 不是定直线

12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 满足 $f(x_0)=f(x_0+1)=-\frac{1}{2}$，且 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+1)$ 上有最小值，无最大值. 则下述四个结论正确的是

A. $f\left(x_0+\frac{1}{2}\right)=-1$

B. 若 $x_0=0$，则 $f(x)=\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)$ 的最小正周期为 3

D. $f(x)$ 在 $(0,2019)$ 上的零点个数最少为 1345 个

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 已知 i 是虚数单位，复数 $z=a+\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，且满足 $z=\frac{1-3\mathrm{i}}{z+1}$，则 $|z|=$________.

14. 已知函数 $f(x)=\frac{x+1}{|x|+1}$，则 $f(x^2-2x)<f(2-x)$ 的解集是________.

15. 已知抛物线 $\Gamma: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F$，准线为直线 $l$，点 $A$ 与 $F$ 在准线 $l$ 的两侧，且 $AF\perp l$，$|AF|=2p$，$B\left(\frac{3p}{2},y_0\right)$ 是抛物线 $\Gamma$ 上的一点，$BC$ 垂直 $l$ 于点 $C$，$AB$ 分别交 $l$，$CF$ 于点 $D$，$E$，则 $|BC|=$________；若 $|EF|=\lambda|DF|$，则 $\lambda$ 的值为________.

16. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+ax+1(a\leqslant 1)$ 在不同的两点 $P_1(t_1,f(t_1))$，$P_2(t_2,f(t_2))$ 处的切线的斜率相等，若不等式 $f(t_1+t_2)+m\geqslant 0(m\in\mathbf{R})$ 恒成立，则实数 $m$ 的取值范围是________.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17.（本小题满分 10 分）

在①$3a_2+b_2+b_4=0$，②$a_4=b_4$，③$S_3=-27$ 这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答问题. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$，________，$a_5=b_1$，$4T_n=3b_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，是否存在实数 $\lambda$，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $\lambda\leqslant S_n$？若存在，求实数 $\lambda$ 的取值范围；若不存在，请说明理由.（注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）

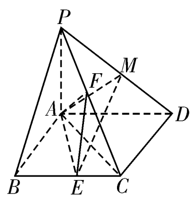
18.（本小题满分 12 分）

三角形 $ABC$ 的内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $a\cos\frac{B}{2}=b\sin A$.

(1)求 $B$；

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c=1$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）




已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle ABC=60^\circ$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$E$，$M$ 分别是 $BC$，$PD$ 上的中点，直线 $EM$ 与平面 $PAD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$，点 $F$ 在 $PC$ 上移动.

(1)证明：无论点 $F$ 在 $PC$ 上如何移动，平面 $AEF\perp$ 平面 $PAD$；

(2)若点 $F$ 为 $PC$ 的中点，求二面角 $C-AF-E$ 的余弦值.

20.（本小题满分 12 分）

过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内一点 $A(0,1)$ 的动直线 $l'$ 与椭圆相交，当 $l'$ 平行于 $x$ 轴和垂直于 $x$ 轴时，$l'$ 被椭圆 $C$ 所截得的线段长均为 $2\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 $C$ 的标准方程；

(2)过点 $F(\sqrt{2},0)$ 作直线 $l$ 交椭圆 $C$ 于点 $M$，$N$，求三角形 $OMN$ 面积的最大值.

21.(本小题满分 12 分)

华为手机的“麒麟 970”芯片在华为处理器排行榜中最高主频 2.4 GHz,同时它的线程结构也做了很大的改善,整个性能及效率至少提升了 50%,科研人员曾就是否需采用西门子制程这一工艺标准进行了反复比较,在一次实验中,工作人员对生产出的 50 片芯片进行研究,结果发现使用了该工艺的 30 片芯片有 28 片线程结构有很大的改善,没有使用该工艺的 20 片芯片中有 12 片线程结构有很大的改善.

(1)用列联表判断:这次实验是否有 99.5%的把握认为“麒麟 970” 芯片的线程结构有很大的改善与使用西门子制程这一工艺标准有关?

(2)在“麒麟 970”芯片的线程结构有很大的改善后,接下来的生产制作还需对芯片的晶圆依次进行金属溅镀,涂布光阻,蚀刻技术,光阻去除这四个环节的精密操作,进而得到多晶的晶圆,生产出来的多晶的晶圆经过严格的质检,确定合格后才能进入下一个流程. 如果生产出来的多晶的晶圆在质检中不合格,那么必须依次对前四个环节进行技术检测并对所有的出错环节进行修复才能成为合格品. 在实验的初期,由于技术的不成熟,生产制作的多晶的晶圆很难达到理想状态,研究人员根据以往的数据与经验得知在实验生产多晶的晶圆的过程中,前三个环节每个环节生产正常的概率为$\frac{2}{3}$,每个环节出错需要修复的费用均为 200 元,第四环节生产正常的概率为$\frac{3}{4}$,此环节出错需要修复的费用为 100 元,问:一次试验生产出来的多晶的晶圆要成为合格品大约还需要消耗多少元费用?(假设质检与检测过程不产生费用)

参考公式:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

参考数据:

| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{e^{x-1}-ax+a}{x^2}$,$g(x)=(2a-1)\ln x-ax-\frac{2}{x}$,其中$a\geqslant 0$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$在点 $P(1,f(1))$处的切线方程;

(2)设函数 $F(x)=f(x)+g(x)$,若 $x=2$ 是 $F(x)$的唯一极值点,求 $a$ 取值的集合.