石家庄二中2020--2021学年度高一年级第二学期期中考试

答案

一．选择题

1．C．2.A　3．A　4．C．5．D．6．C．7．C　8．A．9．C．

10．A．11．CD．12．BC．

二．填空题

13．$\dfrac{1}{3n-2}$　　14．$[-1,2]$　　15.2　　16.$\dfrac{2023}{2}$

三．解答题

17．解：（I）因为$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\cos A}{2-\cos B}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$,

所以 $2\sin A-\sin A\cos B=\sin B\cos A$，

所以 $2\sin A=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$，

由正弦定理可得，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{1}{2}$;

（II）由余弦定理可得，$\dfrac{1}{4}=\dfrac{a^2+16-4a^2}{8a}$,

整理可得，$3a^2+2a-16=0$，

$a>0$　　所以 $a=2$，

因为 $\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$;

18 解：（1）设数列$\{a_n\}$的公差为 d，

因为$a_6-a_2=8$，所以 $4d=8$，解得 $d=2$，

因为 a_1，a_6，a_{21} 依次成等比数列，所以$a_6^2=a_1a_{21}$,

即$(a_1+5\times 2)^2=a_1(a_1+20\times 2)$，解得 $a_1=5$，

所以 $a_n=2n+3$;

（2）由（1）知$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n+3)(2n+5)}$,

所以$b_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+3}-\dfrac{1}{2n+5}\right)$，

所以$S_n=\frac{1}{2}[(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})+\cdots+(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5})]=\frac{n}{5(2n+5)}$，

由$\frac{n}{5(2n+5)}=\frac{1}{11}$，

得 $n=25$.

19．解：（1）证明：由已知得 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{AD^2+(AB-CD)^2}=\sqrt{2}$，

$AB=2$，

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore BC\perp AC$，

$\because PA\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BC$，

$\because PA\cap AC=A$，$\therefore BC\perp$平面 PAC，

$\because BC\subset$平面 PBC，$\therefore$平面 $PAC\perp$平面 PBC.

（2）解：由（1）得 $BC\perp$平面 PAC，$\therefore BC\perp AC$，

$BC=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，

设点 D 到平面 PBC 的距离为 d，

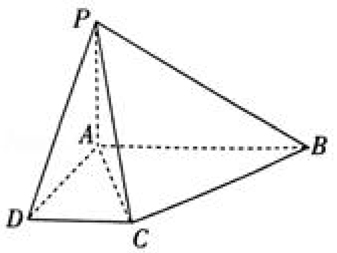
$\because V_{P-BCD}=V_{D-PBC}$，

$\therefore \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times DC\times AD\times PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times PC\times BC\times d$，

$\therefore \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times d$，

解得 $d=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore$点 D 到平面 PBC 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.



20．解：（1）由已知可得$\angle PAB=180^\circ-120^\circ-45^\circ=15^\circ$，

$\therefore \angle PAC=45^\circ-15^\circ=30^\circ$，

在$\triangle PAC$ 中，$\angle PCA=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ$，

$\therefore PA=PC=2$，

∴△PAC的面积$S=\frac{1}{2}PA\bullet PC\bullet\sin\angle PAC=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

（2）∵$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴在△PAB中，由正弦定理$\frac{PB}{\sin 15°}=\frac{PA}{\sin 45°}$，可得$PB=\frac{2\sin 15°}{\sin 45°}=$

$$\frac{2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}-1.$$

21．解：（1）依题意得：$b_3^2=b_2b_4$,

∴$(a_1+6)^2=(a_1+2)(a_1+14)$,

∴$a_1^2+12a_1+36=a_1^2+16a_1+28$,

解得$a_1=2$.

∴$a_n=2+2(n-1)=2n$.

设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，∴$q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{a_4}{a_2}=\frac{8}{4}=2$,

又$b_2=a_2=4$，∴$b_n=4\times 2^{n-2}=2^n$;

（2）由（1）知，$a_n=2n$，$b_n=2^n$.

∵$\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{c_n}{a_n}=2^{n+1}$，①

当$n\geqslant 2$时，$\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{a_{n-1}}=2^n$，②

由①－②得，$\frac{c_n}{a_n}=2^n$，即$c_n=n\bullet 2^{n+1}$,

又当$n=1$时，$c_1=a_1b_2=2^3$不满足上式，

∴$c_n=\begin{cases}8, & n=1\\ n\bullet 2^{n+1}, & n\geqslant 2\end{cases}$;

数列$\{c_n\}$的前2020项的和$S_{2020}=8+2\times 2^{3}+3\times 2^{4}+\cdots+2020\times 2^{2021}$

$=4+1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+2020\times 2^{2021}$.

设$T_{2020}=1\times 2^{2}+2\times 2^{3}+3\times 2^{4}+\cdots+2019\times 2^{2020}+2020\times 2^{2021}$，③

则$2T_{2020}=1\times 2^{3}+2\times 2^{4}+3\times 2^{5}+\cdots+2019\times 2^{2021}+2020\times 2^{2022}$，④

由③－④得：$-T_{2020}=2^{2}+2^{3}+2^{4}+\cdots+2^{2021}-2020\times 2^{2022}$

$=\frac{2^{2}(1-2^{2020})}{1-2}-2020\times 2^{2022}=-4-2019\times 2^{2022}$.

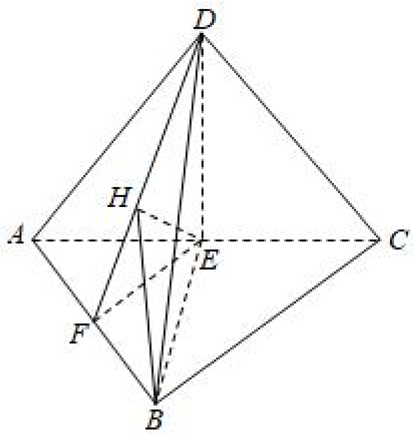
$\therefore T_{2020}=2019\times 2^{2022}+4$,

$\therefore S_{2020}=T_{2020}+4=2019\times 2^{2022}+8$.

22.（1）证明：因为$DA=DB=DC$，所以E，F分别是AB，AC的中点，

所以$EF\parallel BC$，从而$BC\parallel$平面DEF

（2）解：在$\triangle DEF$中过E作DF的垂线，垂足H，



由（1）知$EH\perp$平面DAB，$\angle EBH$即所求线面角，

由F是AB中点，$AB\perp EF$得$EA=EB$

设$AC=2$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，则$DE=\sqrt{3}$，$EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$DF=\frac{\sqrt{15}}{2}$ $EH=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以所求线面角的正弦值为$\sin\angle EBF=\frac{EH}{EB}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，所以余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$