

## 广州市第 41 中学高二下学期 3 月测试题 数学

### 一、选择题（每小题 5 分，共 12 小题，满分 60 分）

1. 若复数  $z = \frac{1-i}{i}$  ( $i$  为虚数单位), 则  $Z$  的共轭复数  $\bar{Z} =$  ( )

- A.  $1+i$                       B.  $-1+i$                       C.  $1-i$                       D.  $-1-i$

2. 若  $y=f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  可导, 且  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{3\Delta x} = 1$ , 则  $f'(a) =$  ( )

- A.  $\frac{2}{3}$                       B. 2                      C. 3                      D.  $\frac{3}{2}$

3. 下列求导运算正确的是( ).

A.  $(x + \frac{3}{x})' = 1 + \frac{3}{x^2}$

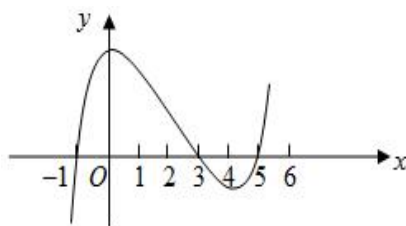
B.  $(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$

C.  $(3^x)' = 3^x \log_3 e$

D.  $(x^2 \cos x)' = -2x \sin x$

4. 函数  $y=f(x)$  导函数  $f'(x)$  的图象如图所示, 则下列说法正确的是 ( )

- A. 函数  $y=f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增  
 B. 函数  $y=f(x)$  的递减区间为  $(3, 5)$   
 C. 函数  $y=f(x)$  在  $x=0$  处取得极大值  
 D. 函数  $y=f(x)$  在  $x=5$  处取得极小值



5. 已知  $i$  是虚数单位,  $a, b \in R$ , 则 “ $a=b=1$ ” 是 “ $(a+bi)^2 = 2i$ ” 的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
 C. 充分必要条件                      D. 既不充分也不必要条件

6. 函数  $f(x) = x - \ln x$  的单调递增区间为( )

- A.  $(0, 1)$                       B.  $(0, +\infty)$                       C.  $(1, +\infty)$                       D.  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

7. 若函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax - 1$  有极值点, 则  $a$  的取值范围为( ).

- A.  $(1, +\infty)$                       B.  $[1, +\infty)$                       C.  $(-\infty, 1)$                       D.  $(-\infty, 1]$

8. 已知函数  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ , 且满足关系式  $f(x) = x^2 + 3xf'(2) + \ln x$ , 则  $f'(2)$  的值等于( )

- A. 2                      B. -2                      C.  $\frac{9}{4}$                       D.  $-\frac{9}{4}$

9. 已知直线  $y = x + 1$  与曲线  $y = \ln(x + a)$  相切, 则  $a$  的值为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. -1                      D. -2

10. 一个箱子的容积与底面边长  $x$  的关系为  $V(x) = x^2(\frac{60-x}{2}) (0 < x < 60)$ , 则当箱子的容积最大时,  $x$  的值为(     )

- A. 60                      B. 50                      C. 40                      D. 30

11. 若函数  $f(x) = \ln x + ax + \frac{1}{x}$  在  $[1, +\infty)$  上是单调函数, 则  $a$  的取值范围是(     )

- A.  $(-\infty, 0] \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$                       B.  $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [0, +\infty)$   
C.  $[-\frac{1}{4}, 0]$                       D.  $(-\infty, 1]$

12. 若  $a > 0, b > 0$ , 且函数  $f(x) = 4x^3 - ax^2 - 2bx + 2$  在  $x = 1$  处有极值, 则  $ab$  的最大值等于(     )

- A. 2                      B. 3                      C. 6                      D. 9

## 二、填空题 (每小题 5 分, 共 4 小题, 满分 20 分)

13. 复平面内, 若  $z = m^2(1+i) - m(4+i) - 6i$  所对应的点在第二象限, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = -x^3 + ax^2 - x - 1$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是单调函数, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = x^3 - 3x - a$  有三个不同的零点, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 设函数  $f(x)$  是奇函数  $f(x)$  ( $x \in R$ ) 的导函数,  $f(-1) = 0$ , 当  $x > 0$  时,

$xf'(x) - f(x) > 0$ , 则使得  $f(x) > 0$  成立的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题 (共 6 小题, 满分 70 分)

17. (本题满分 10 分)

已知复数  $z = 3 + bi (b \in R)$ , 且  $(1 + 3i) \cdot z$  为纯虚数.

- (1) 求复数  $z$ ;                      (2) 若  $w = \frac{z}{2+i}$ , 求复数  $w$  的模  $|w|$ .

18. (本题满分 12 分)

已知椭圆  $C$  的两焦点分别为  $F_1(-2\sqrt{2}, 0)$ 、 $F_2(2\sqrt{2}, 0)$ ，长轴长为 6，

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程；

(2) 已知过点  $(0, 2)$  且斜率为 1 的直线交椭圆  $C$  于  $A$ 、 $B$  两点，求线段  $AB$  的长度。

19. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + b$ ，在点  $M(1, f(1))$  处的切线方程为  $9x + 3y - 10 = 0$ ，求

(1) 实数  $a$ ， $b$  的值；

(2) 函数  $f(x)$  的单调区间以及在区间  $[0, 3]$  上的最值。

20. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = ax^3 + bx^2$  的图象经过点  $M(1, 4)$ ，曲线在点  $M$  处的切线恰好与直线  $x + 9y = 0$  垂直。

(1) 求实数  $a$ ， $b$  的值；

(2) 若函数  $f(x)$  在区间  $[m, m+1]$  上单调递增，求  $m$  的取值范围。

21. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).

(1) 求函数  $f(x)$  的单调递增区间;

(2) 若对任意  $a \in [3, 4]$ , 函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上都有三个零点, 求实数  $b$  的取值范围.

22. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x \ln x$ .

(I) 求函数  $f(x)$  在  $[1, 3]$  上的最小值;

(II) 若存在  $x \in [\frac{1}{e}, e]$  使不等式  $2f(x) \geq -x^2 + ax - 3$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.

