2019-2020-2 高二年级 3 月第二次考试数学(文)试卷

参考答案

一、选择题(每小题 5 分，共 60 分)

1.D	2.B	3.A	4.C	5.D	6.C
7.C	8.C	9.B	10.C	11.A	12.D

二、填空题(每小题 5 分，共 20 分)

13.(1) $-\frac{2}{3}$　　(2)①④　　(3)④　　(4) $\frac{p}{2}$

三、解答题(共 70 分)

14.证明：因为 $a+b+c=0$，

所以 a,b,c 必有一个正数，

不妨设 $c>0$， $a+b=-c$，则 $ab=\frac{1}{c}$，

这样 a,b 可看作方程 $x^2+cx+\frac{1}{c}=0$ 的两实根，

$\Delta=c^2-4\times\frac{1}{c}\geq 0$，即 $c^3\geq 4>\frac{27}{8}$，

所以 $c>\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$，

所以 a,b,c 中至少有一个大于 $\frac{3}{2}$.

15.证明：(1) $\sqrt{3}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-\sqrt{8}$，

$\Leftarrow\sqrt{3}+\sqrt{8}<\sqrt{5}+\sqrt{6}$，

$\Leftarrow 11+2\sqrt{24}<11+2\sqrt{30}$，

$\Leftarrow 24<30$，

而 $24<30$ 显然成立，故原命题得证；

(2) 因为 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{b^2+1}{b}=\frac{a^2b^2+a^2+b^2+1}{ab}\geq\frac{a^2b^2+2ab+1}{ab}=ab+2+\frac{1}{ab}$，

故 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geq\frac{25}{4}$，

$\Leftarrow ab+2+\frac{1}{ab}\geq\frac{25}{4}$，

$\Leftarrow 4(ab)^2-17ab+4\geq 0$，

$\Leftarrow (4ab-1)(ab-4)\geq 0$，

$\Leftarrow ab\leq\frac{1}{4}$ 或 $ab\geq 4$ ……(*)，

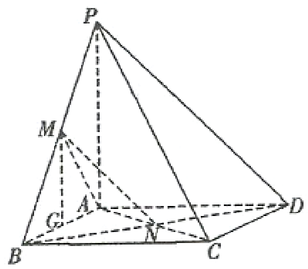
而 $a>0,b>0$，由基本不等式可知 $a+b=1\geq 2\sqrt{ab}$，故 $ab\leq\frac{1}{4}$，(*)成立

故原命题得证.

16. (Ⅰ)证明：连接 ND.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，N 为 AC 的中点.

所以 B,N,D 三点共线，且 N 为 BD 的中点.



因为 M 为 PB 的中点，

所以 MN 为 $\triangle BPD$ 的中位线. ……3 分

所以 $MN/\!/PD$.

因为 $MN\not\subset$ 面 PAD，$PD\subset$ 面 PAD，

所以 $MN/\!/$ 平面 PAD. ……6 分

(Ⅱ)设点 B 到平面 AMN 的距离为 h.

因为 $AM=AN=MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$. ……8 分

过点 M 作 $MG\perp AB$ 于点 G，则 $MG\perp$ 平面 NAB.

可知 M 到平面 ABN 的距离为 $\frac{1}{2}$，$S_{\triangle ABN}=\frac{1}{4}$， ……10 分

由于 $V_{B-AMN}=V_{M-ABN}$.

所以 $h\times\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

即点 B 到平面 AMN 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……12 分

17. 证明：(1)由已知可得，当 $n\in\mathrm{N}^*$ 时，$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$，

两边取倒数得，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+3$，

即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=3$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1}=2$，

公差为 3 的等差数列，

其通项公式为 $\frac{1}{a_n}=2+(n-1)\times 3=3n-1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{3n-1}$.

(2)由(1)知 $a_n=\frac{1}{3n-1}$，

故 $b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{3n-1\qquad 3n+2}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$,

故 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+2}$.

因为$\frac{1}{3n+2}>0$，所以 $T_n<\frac{1}{6}$.

18.解：(1) $h(x)=(4-2\log_2x)\cdot\log_2x=-2(\log_2x-1)^2+2$，

因为 $x\in[1,4]$，所以 $\log_2x\in[0,2]$，

故函数 $h(x)$的值域为$[0,2]$.

(2) 由 $f(x^2)\cdot f(\sqrt{x})>k\cdot g(x)$，

得$(3-4\log_2x)(3-\log_2x)>k\cdot\log_2x$，

令 $t=\log_2x$，因为 $x\in[1,4]$，所以 $t=\log_2x\in[0,2]$，

所以$(3-4t)(3-t)>k\cdot t$ 对一切 $t\in[0,2]$恒成立，

①当 $t=0$ 时，$k\in\mathrm{R}$；

②当 $t\in(0,2]$时，$k<\frac{(3-4t)(3-t)}{t}$恒成立，

即 $k<4t+\frac{9}{t}-15$，

因为 $4t+\frac{9}{t}\geq 12$，当且仅当 $4t=\frac{9}{t}$，即 $t=\frac{3}{2}$时取等号，

所以 $4t+\frac{9}{t}-15$ 的最小值为-3.

综上，实数 k 的取值范围为$(-\infty，-3)$.

19. 解：（Ⅰ）根据题意设直线 AB 的方程为 $y=k(x+2),(k\neq 0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}y=k(x+2),\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 所以$(1+3k^2)x^2+12k^2x+12k^2-6=0$.

$x_1+x_2=\frac{-12k^2}{1+3k^2}$ ① $\quad x_1x_2=\frac{12k^2-6}{1+3k^2}$ ②

$\because k_{AM}+k_{BM}=\frac{y_1}{x_1+3}+\frac{y_2}{x_2+3}=\frac{k(x_1+2)}{x_1+3}+\frac{k(x_2+2)}{x_2+3}=\frac{k[2x_1x_2+5(x_1+x_2)+12]}{x_1x_2+3(x_1+x_2)+9}$,

将①、②两式代入得 $2x_1x_2+5(x_1+x_2)+12=\frac{24k^2-12}{1+3k^2}+\frac{-60k^2}{1+3k^2}+12=0$,

$\therefore k_{AM}+k_{BM}=0$，所以 $\angle AMF=\angle FMB$ 成立.……………………………………6 分

（Ⅱ）ΔMAB 面积 $S=\frac{1}{2}|MF|\cdot|y_1|+\frac{1}{2}|MF|\cdot|y_2|$.……………………………………7 分

$$S=\frac{1}{2}|MF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times 1\times|k(x_1+2)-k(x_2+2)|$$

$$=\frac{1}{2}|k(x_1-x_2)|=\frac{1}{2}|k|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{6(k^2+k^4)}{(1+3k^2)^2}}$$ ………………8 分

$$=\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{\frac{1}{9}(1+3k^2)^2+\frac{1}{9}(1+3k^2)-\frac{2}{9}}{(1+3k^2)^2}}.$$

令 $t=1+3k^2(t\geq 1)$，则 $S=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{\frac{t^2+t-2}{t^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{1+\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.…………………………………………………………12 分