

高二年级数学学科

考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟；
2. 答题前，在答题卷指定区域填写学校、班级、姓名、试场号、座位号及准考证号。
3. 所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效；
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

1. 抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点坐标是(▲).

- A. (2,0) B. (4,0) C. (8,0) D. $(\frac{1}{32}, 0)$

2. “ $m > 0$ ”是“不等式 $x^2 - 2x + 2m > 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立”的(▲)条件.

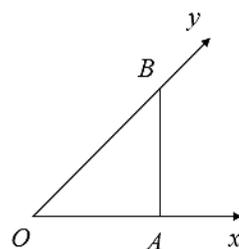
- A. 充分必要 B. 充分不必要 C. 必要不充分 D. 既不充分也不必要

3. 若点 $(m, 3)$ 到直线 $4x - 3y - 1 = 0$ 的距离不小于 2，则 m 的取值范围是(▲).

- A. $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$ B. $[0, 5]$
 C. $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{19}{4}, +\infty)$ D. $[-\frac{1}{4}, \frac{19}{4}]$

4. 一个水平放置的平面图形的斜二测直观图如图所示，是一个直角边水平，斜边长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形，则原平面图形的周长等于(▲).

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2} + 2$ C. $2 + \sqrt{2}$ D. $4 + 2\sqrt{2}$



5. 设 m, n 是两条不同的直线， α, β, γ 是三个不同的平面，给出下列命题：

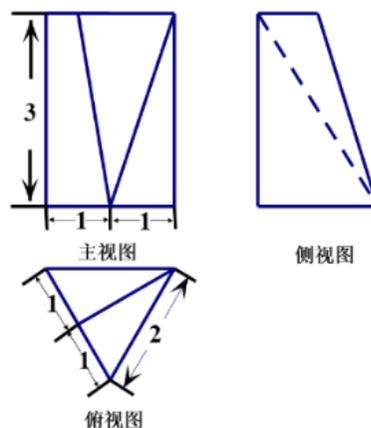
- ①若 $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$ ，则 $m \perp n$ ；
- ②若 $m \perp \alpha, m \perp n$ ，则 $n \parallel \alpha$ ；
- ③若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, m \perp n$ ，则 $n \perp \alpha$ ；
- ④若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ 。

其中不正确的命题的个数是(▲).

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是(▲).

- A. $3\sqrt{3}$ B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
 C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$



7. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 CC_1 的中点，则异面直线 AE 与 CD_1 所成角的余弦值是(▲).

- A. $\frac{\sqrt{34}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

8. 给定圆 O 及圆内一点 P , 设 A, B 是圆 O 上的两个动点, 满足 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$, 则线段 AB 的中点的轨迹是(▲).

- A. 一个圆 B. 一个椭圆 C. 抛物线的一部分 D. 双曲线的一部分

9. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 以 F_2 为焦点的抛物线与椭圆交于点 P , 且 $\angle PF_1F_2 = \frac{\pi}{4}$, 则椭圆的离心率是(▲).

- A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 四边形 $ABCD$ 满足 $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 沿 AC 将 $\triangle ADC$ 翻折成 $\triangle AD'C$, 设直线 AD' 与直线 BC 所成的角为 θ_1 , 直线 AD' 与平面 $D'BC$ 所成的角为 θ_2 , 直线 BD' 与平面 ACD' 所成的角为 θ_3 , 则(▲).

- A. $\theta_2 \leq \theta_1 \leq \theta_3$ B. $\theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_1$ C. $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$ D. $\theta_3 \leq \theta_2 \leq \theta_1$

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分.

11. 椭圆 $\frac{y^2}{3} + x^2 = 1$ 的长轴长是 ▲, 离心率为 ▲.

12. 已知直线 $l: x - ay - 2a - 3 = 0$, 则直线 l 过定点 ▲; 若直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $a =$ ▲.

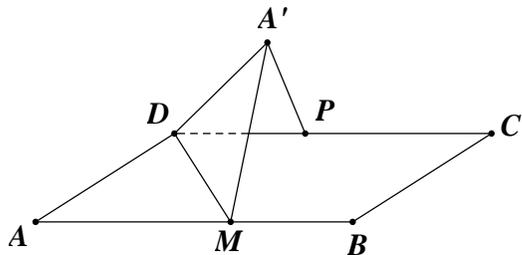
13. 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 2$, 则该几何体的表面积为 ▲; 其外接球的半径为 ▲.

14. 已知直线 $l_1: 2x - my - 1 = 0$, $l_2: (m-1)x - y + 1 = 0$, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $m =$ ▲; 此时圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 被直线 l_2 截得的弦长为 ▲.

15. 若抛物线 $y = ax^2 - 2$ 上存在关于直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 成轴对称的两点, 则实数 a 的取值范围是 ▲.

16. 已知点 F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的右焦点, 点 $P(0, 3)$ 到椭圆上的动点 Q 的距离的最大值不超过 $2\sqrt{5}$, 当椭圆的离心率取到最大值时, 则 $|PQ| + |QF|$ 的最大值等于 ▲.

17. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $\angle A = 60^\circ$, M 是线段 AB 上的动点, P 是线段 CD 上的动点, 将 $\triangle ADM$ 沿 DM 翻折至 $\triangle A'DM$, 使得二面角 $A' - DM - B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$. 则 $|A'P|$ 的最小值为 ▲.



三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. 已知命题 P ：方程 $\frac{x^2}{2m} + \frac{y^2}{m+2} = 1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，命题 Q ：曲线

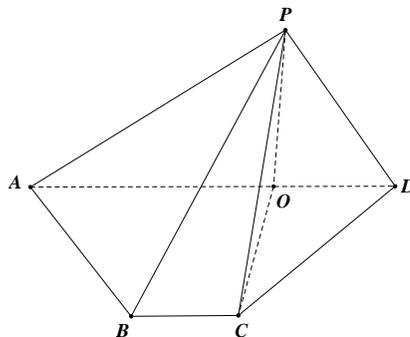
$$y = x^2 - (2m - 3)x + 1 \text{ 与 } x \text{ 轴交于不同的两点.}$$

- (1) 若命题 P 为真命题，求实数 m 的取值范围；
- (2) 若命题 P 、 Q 中有一个为真命题，另一个为假命题，求实数 m 的取值范围。

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ ， $BC = 1$ ， $AB = CD = \sqrt{2}$ ， $AD = 3$ ，且 $PD \perp PA$ ，

$$PD = \sqrt{3}, \quad PC = \sqrt{5}.$$

- (1) 若 O 在线段 AD 上，满足 $DO = \frac{1}{3}AD$ ，求证：平面 $PBC \perp$ 平面 POC ；
- (2) 求直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值。

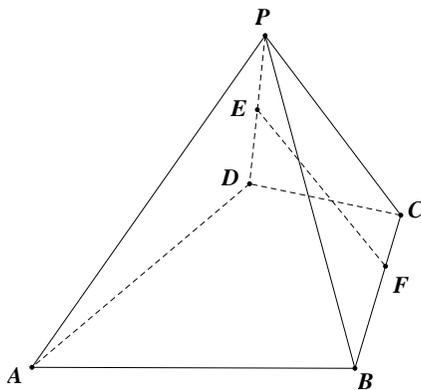


20. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，抛物线 C 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线与准线交于点 M ，点 P 在准线上的射影为 Q 。

- (1) 求过点 P 的切线方程（用 y_0 表示）；
- (2) 若以 MF 为直径的圆与 QF 交于点 N ，且 $\overrightarrow{FN} = t\overrightarrow{NQ}$ ，求 t 的值。

21. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB = AD = \sqrt{5}, CB = CD = \sqrt{2}, BD = 2$.

- (1) 若线段 PD, BC 上的点 E, F 分别满足 $PE = \frac{1}{2}PD, CF = \frac{1}{3}CB$ ，求证： $EF //$ 平面 PAB ；
- (2) 若平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PD \perp PB, PD = PB$ 。求平面 PAB 与平面 PBC 所成的锐二面角的余弦值。



22. 已知动点 $M(x, y)$ 到定点 $F(-1, 0)$ 的距离和 $M(x, y)$ 到直线 $l: x = -2$ 的距离的比是常数 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (1) 求点 M 的轨迹 C ；
- (2) 若 A 为轨迹 C 与 x 轴左侧的交点，直线 PQ 交轨迹 C 于 P, Q 两点（不与 A 重合），连接 PA, QA ，并延长交直线 l 于 M, N 两点，且 $MF \perp NF$ ，问：直线 PQ 是否经过定点？若是，请求出该定点；若不是，试说明理由；
- (3) 在 (2) 的条件下，若直线 PQ 斜率 k 的取值范围是 $[1, 2]$ ，求 ΔFMN 面积的取值范围。