高二年级数学试题（8 周）

第一卷　　共 60 分

一、选择题（每题有且仅有一个正确答案，请将正确答案填涂在答题卷相应位置，每小题 5 分，共 60 分）

1. 函数 $f(x)=\sin x+1$ 导数是

（A） $\cos x$　　（B） $-\cos x+1$　　（C） $\cos x+1$　　（D） $-\cos x$

答案：A

2．已知命题 $p:\exists x_0\in R$，使得 $2^{x_0}=1$，则 $\neg p$ 是（　　）

A. $\exists x_0\notin R$， $2^{x_0}\neq 1$　　B. $\forall x_0\notin R$， $2^{x_0}\neq 1$

C. $\exists x_0\in R$， $2^{x_0}\neq 1$　　D. $\forall x_0\in R$， $2^{x_0}\neq 1$

答案：D

3.复平面内表示复数 $i(1-2i)$ 的点位于(　　　)

$A.$ 第一象限　　$B.$ 第二象限

$C.$ 第三象限　　$D.$ 第四象限

试题分析：因为复数 $z=i(1-2i)=i-2i^2=2+i$，它在复平面内对应的点的坐标为，位于第一象限，故选 A.

4. 为了调查胃病是否与生活规律有关，某同学在当地随机调查了 500 名 30 岁以上的人，并根据调查结果计算出了随机变量 K^2 的观测值 $k=6.080$，则认为 30 岁以上的人患胃病与生活无规律有关时，出错的概率不会超过

（A）0.001　　（B）0.005　　（C）0.010　　（D）0.025

附表：

$P(K^2\geq k_0)$	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	0.708	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

试题分析：选 D

5. 若 $f(x)=x^3+ax^2+3x+1$ 在定义域 R 内为单调递增函数，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $[-1,1]$　　B. $[-3,3]$

C. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　D. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

试题分析： $f(x)=x^3+ax^2+3x+1\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+3$， $f(x)$ 在 R 上单增，则 $f'(x)\geq 0$ 在 R 上恒成立，则 $\Delta\leq 0\Rightarrow a\in[-3,3]$，选 B

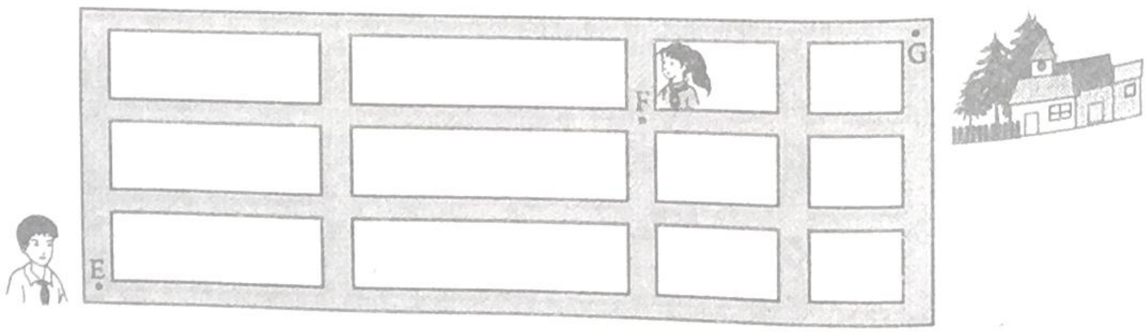
6. 已知变量 x 与 y 正相关，且由观测数据算得样本平均数 $\overline{x}=3$，$\overline{y}=3.5$，则由该观测的数据算得的线性回归方程可能是(　　　)

$A.\hat{y}=0.4x+2.3$　　　　　　　　$B.\hat{y}=2x-2.4$

$C.\hat{y}=-2x+9.5$　　　　　　　　$C.\hat{y}=-0.3x+4.4$

试题分析：因为变量与正相关，所以排除选项，又因为回归直线必过样本中心点 $(3,3.5)$，代入检验知，只有直线 $y=0.4x+2.3$ 过点 $(3,3.5)$，故选 A.

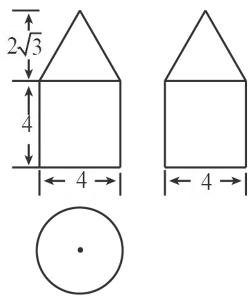
7.如图，小明从街道的 E 处出发，先到 F 处与小红会合，再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动，则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为



（A）24　　　（B）18　　　（C）12　　　（D）9

试题分析：由题意，小明从街道的 E 处出发到 F 处最短路径的条数为 6，再从 F 处到 G 处最短路径的条数为 3，则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为 $6\times3=18$，故选 B.

8.如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，则该几何体的表面积为



（A）20π　　　（B）24π　　　（C）28π　　　（D）32π

试题分析：由题意可知，圆柱的侧面积为 $S_1=2\pi\cdot2\cdot4=16\pi$，圆锥的侧面积为 $S_2=\pi\cdot2\cdot4=8\pi$，圆柱的底面面积为 $S_3=\pi\cdot2^2=4\pi$，故该几何体的表面积为 $S=S_1+S_2+S_3=28\pi$，故选 C.

9.某路口人行横道的信号灯为红灯和绿灯交替出现，红灯持续时间为 40 秒.若一名行人来到该路口遇到红灯 ，则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为

（A）$\dfrac{7}{10}$　　（B）$\dfrac{5}{8}$　　（C）$\dfrac{3}{8}$　　（D）$\dfrac{3}{10}$

试题分析：因为红灯持续时间为 40 秒,所以这名行人至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为$\dfrac{40-15}{40}=\dfrac{5}{8}$，故选 B.

10.下列结论中，正确的是

（A）导数为零的点一定是极值点

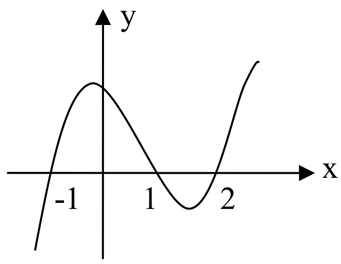
（B）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是极大值

（C）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 是极大值

（D）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是极小值

试题分析：选 B

11. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $F(x)=(1-x)f'(x)$ 的图像如右图所示，零点分别为 -1，1，2，则 $f(-1),f(1),f(2)$ 的大小关系正确的是（　　）



（第 11 题图）

A. $f(-1)=f(1)=f(2)$　　B. $f(-1)<f(1)<f(2)$

C. $f(-1)>f(1)>f(2)$　　D. $f(-1)<f(2)<f(1)$

解析：讨论知 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，$-1<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，$1<x<2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，$x>2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，所以 $f(-1)<f(1)<f(2)$，选 B

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4}, & x\in[2,+\infty),\\ 2-x, & x\in(-\infty,2),\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)-kx+k=0$ 有且只有一个实根，则实数 k 的取值范围是

A.　$k\le 0$ 或 $k>1$　　B. $k>1$或$k=0$或$k<-1$

C. $k>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$或$k=0$或$k<-1$　　D．$k>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$或$k=0$或$k<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：数形结合法，双曲线的右上半支和一条射线，注意双曲线的渐进线。选 C

二、填空题（请将正确答案填在答题卷相应位置，每小题 5 分，共 20 分）

13. 在两个变量 y 与 x 的回归模型中，分别选择了四个不同的模型，且它们的 R^2 的值的大小

关系为：$R^2_{模型3} < R^2_{模型4} < R^2_{模型1} < R^2_{模型2}$，则拟合效果最好的是 ___

答案：模型 2

14.设复数 $a+bi$（a，$b\in R$）的模为 $\sqrt{3}$，则（$a+bi$）（$a-bi$）=________.

【答案】3

【解析】由 $|a+bi|=\sqrt{3}$ 得 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}$，即 $a^2+b^2=3$，所以 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=3$.

15.若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\geq 0, \\ x+y-3\geq 0, \\ x-3\leq 0, \end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最小值为__________.

【答案】-5

【解析】

试题分析：由 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$，记为点 $A(1,2)$；由 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$，记为点 $B(3,4)$；

由 $\begin{cases} x-3=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$，记为点 $C(3,0)$.分别将 A，B，C 的坐标代入 $z=x-2y$，得学科.网

$z_A=1-2\times 2=-3$，$z_B=3-2\times 4=-5$，$z_C=3-2\times 0=3$，所以 $z=x-2y$ 的最小值为 -5.

16.已知 $x=3$ 是函数 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+2$ 的一个极值点，不等式 $b<f(x), x\in[2,4]$ 时恒成立，则 b 的取值范围为________

解 $\because f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+2 \therefore f'(x)=3ax^2-3x$

又 $\because x=3$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个极值点

$\therefore f'(3)=0 \therefore a=\frac{1}{3}$

此时 $f'(x)=x^2-3x=x(x-3)$

由 $f'(x)>0$ 得 $x<0或x>3$，$f'(x)<0$ 得 $0<x<3$

故 $f(x)$ 的单增区间为 $(-\infty,0),(3+\infty)$，单减区间为 $(0,3)$

知：$f(x)在[2,3]$ 上为减函数，在 $[3,4]$ 上为增函数

$\therefore 当x\in[2,4]时$，$f(x)_{\min}=f(3)=-\frac{5}{2}$

$\because b<f(x), x\in[2,4]$ 恒成立

即 $b<f(x)_{\min}$

故 $b<-\frac{5}{2}$

三、解答题：本大题共 6 小题，第 17 题 10 分 ，第 18 题～第 21 题，每小题 12 分，，共 70 分．解答应写出字说明、证明过程或演算步骤．

17（本小题满分 **10** 分）

在某地区 **2008** 年至 **2014** 年中，每年的居民人均纯收入 y（单位：千元）的数据如下表：

年　　份	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
年份代号 t	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入 y	2.7	3.6	3.3	4.6	5.4	5.7	6.2

对变量 t 与 y 进行相关性检验，得知 t 与 y 之间具有线性相关关系．

（Ⅰ）求 y 关于 t 的线性回归方程；

（Ⅱ）预测该地区 **2016** 年的居民人均纯收入．

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}.\end{cases}$$

解：（Ⅰ）由已知表格的数据，得 $\overline{t}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，

$\overline{y}=\dfrac{2.7+3.6+3.3+4.6+5.4+5.7+6.2}{7}=4.5$，

$\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})=(-3)\times(-1.8)+(-2)\times(-0.9)+(-1)\times(-1.2)$

$+0\times0.1+1\times0.9+2\times1.2+3\times1.7$

$=16.8$，

$\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2=(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2=28$，

∴ $\hat{b}=\dfrac{16.8}{28}=0.6$．

∴ $\hat{a}=4.5-0.6\times4=2.1$． ∴$y$ 关于 t 的线性回归方程是 $\hat{y}=0.6x+2.1$．

（Ⅱ）由（Ⅰ），知 y 关于 t 的线性回归方程是 $\hat{y}=0.6x+2.1$．

将 **2016** 年的年份代号 $t=9$ 代入前面的回归方程，得 $\hat{y}=0.6\times9+2.1=7.5$．

故预测该地区 **2016** 年的居民人均收入为 7.5 千元．

18 (本小题满分 12 分)

某险种的基本保费为 a（单位：元），继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下：

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥5
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况，得到如下统计表：

出险次数	0	1	2	3	4	≥5
频数	60	50	30	30	20	10

(Ⅰ)记 A 为事件：“一续保人本年度的保费不高于基本保费”.求 $P(A)$的估计值；

(Ⅱ)记 B 为事件：“一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%”.求 $P(B)$的估计值；

(III)求续保人本年度的平均保费估计值.

试题解析：(Ⅰ)事件 A 发生当且仅当一年内出险次数小于 2.由所给数据知，一年内险次数小于 2 的频率为 $\dfrac{60+50}{200}=0.55$，故 $P(A)$的估计值为 0.55.

（Ⅱ）事件 B 发生当且仅当一年内出险次数大于 1 且小于 4.由所给数据知，一年内出险次数大于 1 且小于 4 的频率为 $\dfrac{30+30}{200}=0.3$，故 $P(B)$的估计值为 0.3.

(III)由所给数据得

保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$
频率	0.30	0.25	0.15	0.15	0.10	0.05

调查的 200 名续保人的平均保费为

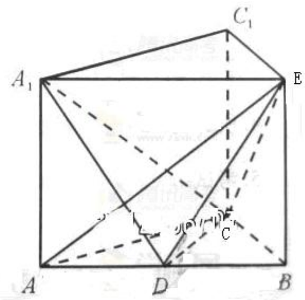
$$0.85a\times0.30+a\times0.25+1.25a\times0.15+1.5a\times0.15+1.75a\times0.10+2a\times0.05=1.192\ 5a,$$

因此，续保人本年度平均保费的估计值为 $1.192\ 5a$.

19.（本小题满分 12 分）

已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=4$，$AC=BC=3$，D 为 AB 的中点。

（Ⅰ）求点 C 到平面 A_1ABB_1 的距离；（Ⅱ）若 $AB_1\perp A_1C$，求二面角 A_1-CD-C_1 的平面角的余弦值。



【解析】:（Ⅰ）因 $AC=BC=3$，D 为 AB 的中点，得 $CD\perp AB$。又 $CD\perp AA_1$ 故 $CD\perp$ 面 A_1ABB_1 所以 C 到平面 A_1ABB_1 的距离为

CD=$\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{5}$

（Ⅱ）：如答（19）图 1，取 D_1 为 A_1B_1 的中点，连接 DD_1，则 $DD_1 // AA_1 // CC_1$ 又由（Ⅰ）

知 $CD \perp$ 面 A_1ABB_1 故 $CD \perp A_1D$ ，$CD \perp DD_1$.故 $\angle A_1DD_1$ 为所求的二面角

A_1-CD-C_1 的平面角。

因 A_1D 是 A_1C 在面 A_1ABB_1 上的射影，又已知 $AB_1 \perp A_1C$, 由三垂线定理的逆定理得

$AB_1 \perp A_1D$, 从而 $\angle A_1AB_1$，$\angle A_1DA$ 都与 $\angle B_1AB$ 互余，因此 $\angle A_1AB_1 = \angle A_1DA$，所以

$Rt\ \ A_1AD \cong Rt\ \ B_1A_1A$，因此 $\dfrac{AA_1}{AD} = \dfrac{A_1B_1}{AA_1}$，$AA_1^{\ 2} = AD \cdot A_1B_1 = 8$ 得 $AA_1 = 2\sqrt{2}$

从而 $A_1D=\sqrt{AA_1^{\ 2}+AD^2} = 2\sqrt{3}$, 所以在 $Rt\ \ A_1DD_1$ 中，$\cos A_1DD_1 = \dfrac{DD_1}{A_1D} = \dfrac{AA_1}{A_1D} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(20) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$.

(Ⅰ)当 $a = 4$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

（II）当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$f(x) > 0$ 恒成立，求 a 的取值范围

试题解析：（I） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.当 $a = 4$ 时，

$f(x) = (x+1)\ln x - 4(x-1)$, $f'(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 3$，$f'(1) = -2$, $f(1) = 0$.

曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x + y - 2 = 0$.

（II）当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$f(x) > 0$ 等价于 $\ln x - \dfrac{a(x-1)}{x+1} > 0$.

设 $g(x) = \ln x - \dfrac{a(x-1)}{x+1}$，则

$g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2a}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$, $g(1) = 0$，

(i) 当 $a \le 2$，$x \in (1,+\infty)$ 时，$x^2+2(1-a)x+1 \ge x^2-2x+1 > 0$ ，故 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上

单调递增，因此 $g(x) > 0$；

(ii) 当 $a > 2$ 时，令 $g'(x) = 0$ 得

$x_1 = a-1-\sqrt{(a-1)^2-1}, x_2 = a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}$.

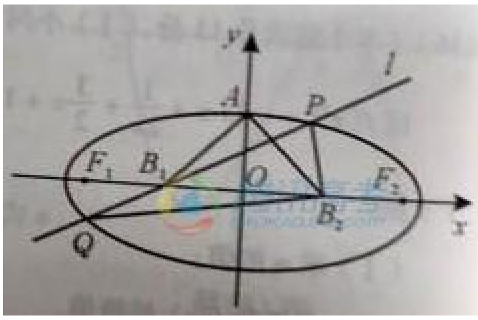
由 $x_2 > 1$ 和 $x_1x_2 = 1$ 得 $x_1 < 1$，故当 $x \in (1, x_2)$ 时，$g'(x) < 0$，$g(x)$ 在 $(1, x_2)$ 单调递减，因此 $g(x) < 0$.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

21（本小题满分 12 分，）

已知椭圆的中心为原点 O，长轴在 x 轴上，上顶点为 A，左、右焦点分别为 F_1, F_2，线段 OF_1, OF_2 的中点分别为 B_1, B_2，且△ AB_1B_2 是面积为 4 的直角三角形。（Ⅰ）求该椭圆的离心率和标准方程;

（Ⅱ）过 B_1 作直线 l 交椭圆于 P, Q，$PB_2 \perp QB_2$，求直线 l 的方程



【解析】:：.（Ⅰ）如答（20）图，设所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1（$a > b > 0$），

右焦点为 $F_2(C,0)$ 因 AB_1B_2 是直角三角形且 $|AB_1| = |AB_2|$，故 $\angle B_1AB_2$ 为直角，从而 $|OA| = |OB_2|$，即 $b = \frac{c}{2}$，结合 $c^2 = a^2 - b^2$ 得 $4b^2 = a^2 - b^2$。故 $a^2 = 5b^2$，$c^2 = 4b^2$ 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$，在 $Rt\ AB_1B_2$ 中，$OA \perp B_1B_2|$ 故 $S\ AB_1B_2 = \frac{1}{2}\cdot|B_1B_2|\cdot|OA|$ $=|OB_2|\cdot|OA| = \frac{c}{2}\cdot b = b^2$ 由题设条件 $S\ AB_1B_2 = 4$ 得 $b^2 = 4$，从而 $a^2 = 5b^2 = 20$ 因此所求 椭圆的的标准方程为：$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}$=1

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $B_1(-2,0), B_2(2,0)$，由题意，直线 PQ 的倾斜角不为 0，故可设直线 PQ

的方程为 $x=my-2$，代入椭圆方程 $(m^2+5)y^2-4my-16=0$（*）

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 y_1,y_2 是上面方程的两根，因此 $y_1+y_2=\dfrac{4m}{m^2+5}$，

$y_1\cdot y_2=\dfrac{-16}{m^2+5}$ 又 $\overrightarrow{B_1P}=(x_1-2,y_1),\overrightarrow{B_2P}=(x_2-2,y_2)$，

所以 $\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{B_2P}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$

$=(my_1-4)(my_2-4)+y_1y_2=(m^2+1)y_1y_2-4m(y_1+y_2)+16$

$=\dfrac{-16(m^2+1)}{m^2+5}-\dfrac{16m^2}{m^2+5}+16=-\dfrac{16m^2-64}{m^2+5}$ 由 $PB_2\perp QB_2$，知 $\overrightarrow{B_2P}\cdot\overrightarrow{B_2Q}=0$，即

$16m^2-64=0$，解得 $m=\pm2$

所以满足条件的直线有两条，其方程分别为 $x+2y+2=0$ 和 $x-2y+2=0$

22（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{5}{2}\ln(x^2+1)-2x$．

（Ⅰ）求此函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设 $g(x)=\dfrac{5}{2}\ln\dfrac{x}{x^2+1}+f(x)+2x$．是否存在直线 $y=kx$（$k\in\mathrm{R}$）与函数 $g(x)$ 的图象相切？若存在，请求出 k 的值，若不存在，请说明理由．

解：（Ⅰ）∵ $f(x)=\dfrac{5}{2}\ln(x^2+1)-2x$，

∴ $f'(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}-2=-\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+1}=-\dfrac{(2x-1)(x-2)}{x^2+1}$．令 $f'(x)\geq0$，得 $-\dfrac{(2x-1)(x-2)}{x^2+1}\geq0$，

解之，得 $\dfrac{1}{2}\leq x\leq2$；令 $f'(x)<0$，得 $-\dfrac{(2x-1)(x-2)}{x^2+1}<0$，解之，得 $x<\dfrac{1}{2}$，或 $x>2$．

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[\dfrac{1}{2},\ 2]$，单调递减区间是 $(-\infty,\ \dfrac{1}{2})$ 和 $(2,\ +\infty)$．

（Ⅱ）∵ $f(x)=\dfrac{5}{2}\ln(x^2+1)-2x$，$g(x)=\dfrac{5}{2}\ln\dfrac{x}{x^2+1}+f(x)+2x$，

∴ $g(x)=\dfrac{5}{2}\ln\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{5}{2}\ln(x^2+1)-2x+2x=\dfrac{5}{2}\ln x$．

∴ $g'(x)=\dfrac{5}{2x}$．

假设存直线 $y=kx$ 与函数 $g(x)$ 的图象相切于点 $(x_0,f(x_0))$（$x_0>0$），

则这条直线可以写成 $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$．

∵ $g(x_0)=\frac{5}{2}\ln x_0$， $g'(x_0)=\frac{5}{2x_0}$，

∴ $y-\frac{5}{2}\ln x_0=\frac{5}{2x_0}(x-x_0)$．即 $y=\frac{5}{2x_0}x+\frac{5}{2}\ln x_0-\frac{5}{2}$．

∴ $\begin{cases} k=\frac{5}{2x_0}, \\ \frac{5}{2}\ln x_0-\frac{5}{2}=0. \end{cases}$ 解之，得 $\begin{cases} k=\frac{5}{2e}, \\ x_0=e. \end{cases}$

所以存在直线 $y=kx$ 与函数 $g(x)$ 的图象相切，k 的值是 $\frac{5}{2e}$．