东北育才学校2020届高三第六次模拟考试（理数）试题

命题人：高三数学备课组　　　　使用时间：2020.3.21

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.在复平面内，已知复数z对应的点与复数$-2-i$对应的点关于实轴对称，则$\dfrac{z}{i}=$

A. $1-2i$　　　B. $1+2i$　　　C. $-1+2i$　　　D. $-1-2i$

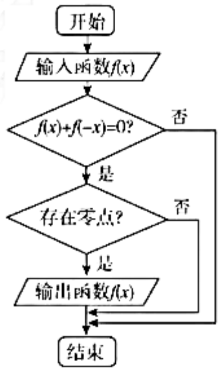
2.已知集合$A=\{(x,y)\mid 2x+y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x+my+1=0\}$.若$A\cap B=\varnothing$，则实数$m=$

A. -2　　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　D. 2

3.在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_3=6, a_3-a_5+a_7=78$，则$a_5=$

A. 12　　　B. 18　　　C. 24　　　D. 36

4.某程序框图如图所示，现输入如下四个函数，则可以输出的函数为



A. $f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$　　　B. $f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$

C. $f(x)=2^x+2^{-x}$　　　D. $f(x)=x^2\ln(1+x^2)$

5.一组数据的平均数为m，方差为n，将这组数据的每个数都加上$a(a>0)$得到一组新数据，则下列说法正确的是

A. 这组新数据的平均不变　　　B. 这组新数据的平均数为am

C. 这组新数据的方差为a^2n　　　D. 这组新数据的方差不变

6.直线$x-y+m=0$与圆$x^2+y^2-2x-1=0$有两个不同交点的一个必要不充分条件是

A. $0<m<1$　　　B. $-1\le m\le 1$　　　C. $-1<m<1$　　　D. $-2<m<0$

7.2013年华人数学家张益唐证明了孪生素数（注：素数也叫做质数）猜想的一个弱化形式.孪生素数猜想是希尔伯特在1900年提出的23个问题之一，可以这样描述：存在无穷多个素数P使得$p+2$是素数，素数对$(p,p+2)$称为孪生素数，从20以内的素数中任取两个，其中能构成孪生素数的概率为

A. $\dfrac{1}{14}$　　　B. $\dfrac{1}{7}$　　　C. $\dfrac{3}{14}$　　　D. $\dfrac{1}{3}$

8.设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，抛物线C与圆$C':x^2+(y-\sqrt{3})^2=3$交于

M, N两点，若$|MN|=\sqrt{6}$，则$p=$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

9. 在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=4$，$AB=2$，点E，F分别为棱BB_1，CC_1上两点，且$BE=\dfrac{1}{4}BB_1$，$CF=\dfrac{1}{2}CC_1$，则

A. $D_1E\neq AF$，且直线D_1E，AF异面　　B. $D_1E\neq AF$，且直线D_1E，AF相交

C. $D_1E=AF$，且直线D_1E，AF异面　　D. $D_1E=AF$，且直线D_1E，AF相交

10. 已知奇函数$f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0, 0<\varphi\leq\pi)$满足$f\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$，则$\omega$的取值可能是

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

11. 直线$x=2$与双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$的渐近线交于$A, B$两点，设$P$为双曲线上任意一点，若$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$（$a, b\in R, O$为坐标原点），则下列不等式恒成立的是

A. $|ab|=2$　　B. $a^2+b^2\geq 4$　　C. $|a-b|\geq 2$　　D. $|a+b|\geq 2$

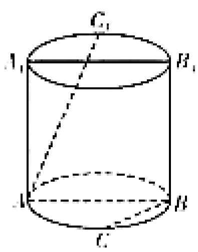
12. 已知函数$f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2+(a-1)x+a(a>0)$的值域与函数$f(f(x))$的值域相同，则$a$的取值范围为

A. $(0,1]$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $\left(0,\dfrac{4}{3}\right]$　　D. $\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right)$

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分.

13. 已知$\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$的展开式的所有项的系数和为64，则其展开式中的常数项为_______.

14. 如图，已知圆柱的轴截面ABB_1A_1是正方形，C是圆柱下底面弧AB的中点，C_1是圆柱上底面弧A_1B_1的中点，那么异面直线AC_1与BC所成角的正切值为______________.



15. 设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_2=1, S_5+S_7>31$，则S_{10}的取值范围是________.

16. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leq a\\ x^2, & x>a\end{cases}$，

①若$a=1$，则不等式$f(x)\leq 2$的解集为_______;

②若存在实数b，使函数$g(x)=f(x)-b$有两个零点，则a的取值范围是_______.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）在①$3c^2=16S+3(b^2-a^2)$；②$5b\cos C+4c=5a$，这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，然后解答补充完整的题目.

在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设△ABC 的面积为 S，已知_______.

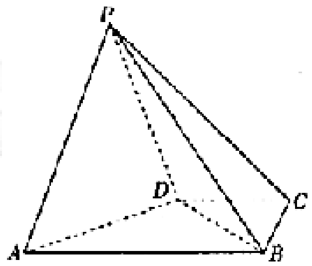
（1）求 $\tan B$ 的值；

（2）若 $S=42$，$a=10$，求 b 的值.

18.（本小题满分 12 分）如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 为梯形，$AB//CD,\angle ABC=\angle BCD=90°,BC=CD=\dfrac{AB}{2}=2.$

(1)证明:$BD\perp PD$;

(2) 若 $\triangle PAD$ 为正三角形,求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）某学校为了解该校高三年级学生数学科学习情况，对一模考试数学成绩进行分析，从中抽取了 n 名学生的成绩作为样本进行统计，该校全体学生的成绩均在$[60,140)$，按照$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100)$，$[100,110)$，$[110,120)$，$[120,130)$，$[130,140)$的分组作出频率分布直方图如图（1）所示，样本中分数在$[70,90)$内的所有数据的茎叶图如图（2）所示．根据上级统计划出预录分数线，有下列分数与可能被录取院校层次对照表为表（3）.

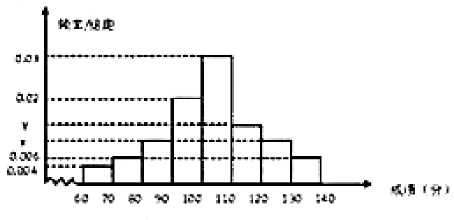


图1

茎	叶
7	2 5 8
8	1 3 5 8 9

图2

分数	$[50,85)$	$[85,110)$	$[110,150)$
可能被录取院校层次	专科	本科	重本

图（3）

（1）求n和频率分布直方图中的x，y的值；

（2）根据样本估计总体的思想，以事件发生的频率作为概率，若在该校高三年级学生中任取3人，求至少有一人是可能录取为重本层次院校的概率；

（3）在选取的样本中，从可能录取为重本和专科两个层次的学生中随机抽取3名学生进行调研，用表示所抽取的3名学生中为重本的人数，求随机变量ξ的分布列和数学期望.

20.（本小题满分12分）已知$A(x_0,0),B(0,y_0)$两点分别在x轴和y轴上运动，且$|AB|=1$，若动点$P(x,y)$满足$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\overrightarrow{OB}$.

（1）求出动点P的轨迹C的标准方程；

（2）设动直线l与曲线C有且仅有一个公共点，与圆$x^2+y^2=7$相交于两点P_1,P_2（两点均不在坐标轴上），求直线OP_1,OP_2的斜率之积.

21.已知函数$f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\ln x$（$a\in R,a$为常数）.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）若函数$f(x)$在$(e,+\infty)$内有极值，试比较e^{a-1}与a^{e-1}的大小，并证明你的结论.

（二）选考题：共10分.请考生在22、23两题中任选一题作答，若多做，则按所做的第一题记分.

22.（本小题满分10分）极坐标与参数方程

已知在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-t\\y=4+t\end{cases}$（$t$为参数），曲线$C_1$的方程为$x^2+(y-1)^2=1$.以坐标原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求直线l和曲线C_1的极坐标方程；

（2）曲线$C_2:\theta=\alpha\left(\rho>0,0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$分别交直线$l$和曲线$C_1$于点$A$，$B$，求$\dfrac{|OB|}{|OA|}$的最大值及相应$\alpha$的值.

23.（本小题满分10分）不等式选讲

已知函数$f(x)=|3x-a|+|3+x|$.

（1）若$a=3$，解不等式$f(x)\le 6$；

（2）若不存在实数x，使得$f(x)\le 1-a-|6+2x|$，求实数a的取值范围.