BC＝$\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$．

（1）求二面角 B—AP—C 大小的余弦值；

（2）求点 P 到底面 ABC 的距离．

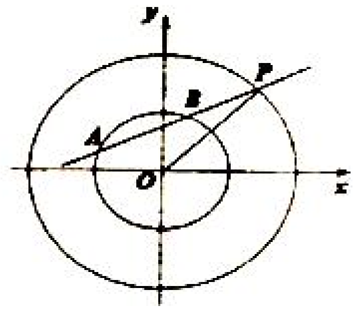
22．（本小题 14 分）已知椭圆 $E_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，是椭圆 $E_2:\dfrac{x^2}{ma^2}+\dfrac{y^2}{mb^2}=1(a>b>0,m>1)$，则称椭圆 E_2 是椭圆 E_1“相似”．

（1）求经过点 $(\sqrt{2},1)$，且与椭圆 $E_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$“相似”的椭圆 E_2 的方程；

（2）若 $m=4$，椭圆 E_1 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，P 在椭圆 E_2 上，过 P 的直线 l 交椭圆 E_1 与 A,B 两点，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$

① 若 B 的坐标为 $(0,2)$，且 $\lambda=2$，求直线 l 的方程；

② ②若直线 OP,OA 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$，求 λ 的值.



江苏省高邮中学高二年级二月份线上学习测试

数学试卷参考答案

1、 A　2、A　3、B　4、A　5、D　6、A　7、B　8、B　9、 C　10、B

11、D　12、B　13、$\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$　14、50　15、$\frac{8}{5}$　16、$(-\frac{2\sqrt{3}}{3}p,0)$

17、略

18、解（1）设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$

联立 $\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=4x \end{cases}$，得 $x^2-6x+1=0$

则 $x_1+x_2=6$，

则 $AB=AF+BF=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=6+2=8$.

（2）设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，$AB$ 的中点为 M

联立 $\begin{cases} y=x+m \\ y^2=4x \end{cases}$，得 $y^2-4y+4m=0$

则 $y_1+y_2=4$，则 $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=2$

则 $M(2-m,2)$.

又 ΔPAB 是以 PA,PB 为腰的等腰三角形

$\therefore PM\perp AB$

$\therefore k_{PM}\cdot k_{AB}=-1$

$\therefore \frac{4}{-3+m}\times 1=-1$

$\therefore m=-1$.

19、解：(1）在等差数列中，设公差为 $d\neq 0$，

由题意 $\begin{cases} a_1a_5={a_2}^2 \\ a_3=5 \end{cases}$，得 $\begin{cases} a_1(a_1+4d)=(a_1+d)^2 \\ a_1+2d=5 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} a_1=1 \\ d=2 \end{cases}$.

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$；

（2）由（1）知，$a_n=2n-1$.

则 $b_n=\frac{1}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{1}{2n\bullet 2(n+1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，

$\therefore T_n=\frac{1}{4}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{n}{4(n+1)}$.

$\because T_{n+1}-T_n=\frac{n+1}{4(n+2)}-\frac{n}{4(n+1)}=\frac{1}{4(n+1)(n+2)}>0$，

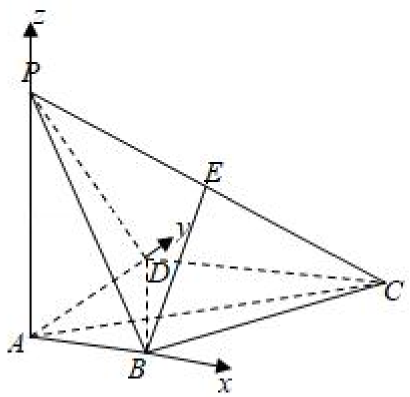
$\therefore \{T_n\}$ 单调递增，而 $T_n=\frac{n}{4(n+1)}<\frac{1}{4}$，

$\therefore$ 要使 $T_n<\frac{m}{5}$ 成立，则 $\frac{m}{5} \geqslant \frac{1}{4}$，得 $m \geqslant \frac{5}{4}$，

又 $m\in Z$，则使得 $T_n<\frac{m}{5}$ 成立的 m 的最小正整数为 2.

20、证明：$(I)\because PA\perp$ 底面 $ABCD$， $AD\perp AB$，

以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



$\because AD=DC=AP=2$， $AB=1$，点 E 为棱 PC 的中点.

$\therefore B(1，0，0)$， $C(2，2，0)$， $D(0，2，0)$， $P(0，0，2)$， $E(1，1，1)$

$\therefore \overrightarrow{BE}=(0，1，1)$， $\overrightarrow{DC}=(2，0，0)$

$\because \overrightarrow{BE}\bullet\overrightarrow{DC}=0$，

$\therefore BE\perp DC$；

（Ⅱ）$\because \overrightarrow{BD}=(-1，2，0)$， $\overrightarrow{PB}=(1，0，-2)$，

设平面 PBD 的法向量 $\vec{m}=(x，y，z)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\bullet\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{m}\bullet\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-x+2y=0\\ x-2z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，则 $\vec{m}=(2，1，1)$，

则直线 BE 与平面 PBD 所成角 θ 满足：

$$\sin\theta=\frac{\vec{m}\bullet\overrightarrow{BE}}{|\vec{m}|\bullet|\overrightarrow{BE}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

故直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅲ）$\because \overrightarrow{BC}=(1，2，0)$，$\overrightarrow{CP}=(-2，-2，2)$，$\overrightarrow{AC}=(2，2，0)$，

由 F 点在棱 PC 上，设 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP}=(-2\lambda，-2\lambda，2\lambda)(0,, \lambda,, 1)$，

故 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=(1-2\lambda，2-2\lambda，2\lambda)(0,, \lambda,, 1)$，

由 $BF\perp AC$，得 $\overrightarrow{BF}\bullet\overrightarrow{AC}=2(1-2\lambda)+2(2-2\lambda)=0$，

解得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$，

即 $\overrightarrow{BF}=(-\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{2}，\dfrac{3}{2})$，

设平面 FBA 的法向量为 $\vec{n}=(a，b，c)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=0\\ -\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{3}{2}c=0\end{cases}$

令 $c=1$，则 $\vec{n}=(0，-3，1)$，

取平面 ABP 的法向量 $\vec{i}=(0，1，0)$，

则二面角 $F-AB-P$ 的平面角 α 满足：

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{i}\bullet\vec{n}|}{|\vec{i}|\bullet|\vec{n}|}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}，$$

故二面角 $F-AB-P$ 的余弦值为：$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

21、解：（1）在 ΔABP 中作 $BD\perp AP$，垂足为 D，

因为 $PB=PC=\sqrt{5}$，$AB=AC=2$，AP 为公共边，

所以 $\Delta ABP\cong\Delta ACP$，又 $BD\perp AP$，所以 $CD\perp AP$，

所以 $\angle BDC$ 为二面角 $B-AP-C$ 的平面角；…..2 分

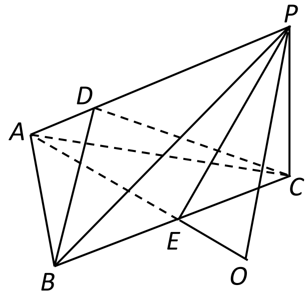
又 $PB^2+AB^2=PA^2$，所以 $\angle PBA=90^\circ$，

故 ΔABP 的面积 $S_{\Delta ABP}=\dfrac{1}{2}AB\cdot PB=\dfrac{1}{2}PA\cdot BD$，

所以 $BD=\dfrac{AB\cdot PB}{PA}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，同理 $CD=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，

在 ΔBCD 中，$\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=-\dfrac{1}{10}$，…..4 分

所以，二面角 $B-AP-C$ 大小的余弦值为 $-\dfrac{1}{10}$．………..5 分



（2）（法一）取 BC 中点 E，连结 AE，PE，在平面 PAE 中作 $PO\perp AE$，垂足为 O．

因为 $AB=AC$，所以 $AE\perp BC$．同理 $PE\perp BC$．

又 $AE\bigcap PE=E$，$AE\subset$ 平面 PAE，$PE\subset$ 平面 PAE，所以 $BC\perp$ 平面 PAE．

因为 $PO\subset$ 平面 PAE，所以 $PO\perp BC$．

又 $PO \perp AE$， $BC \cap AE = E$， $BC \subset$ 平面 ABC， $AE \subset$ 平面 ABC，

所以 $PO \perp$ 平面 ABC，

因此，点 P 到底面 ABC 的距离即为 PO 的长；…………..8 分

在 $\mathrm{Rt}\Delta ABE$ 中， $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{AB^2 - (\frac{1}{2}BC)^2} = \frac{5}{3}$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta PBE$ 中， $PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = \sqrt{PB^2 - (\frac{1}{2}BC)^2} = \frac{\sqrt{34}}{3}$，

在 ΔPAE 中， $\cos\angle PAE = \frac{PA^2 + AE^2 - PE^2}{2PA \cdot AE} = \frac{4}{5}$， ……..10 分

所以， $\sin\angle PAE = \sqrt{1 - \cos^2\angle PAE} = \frac{3}{5}$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta PAO$ 中， $PO = PA \cdot \sin\angle PAE = \frac{9}{5}$， ………..11 分

综上，点 P 到底面 ABC 的距离为 $\frac{9}{5}$． ……………..12 分

（法二）由（1）知 $BD \perp AP$， $CD \perp AP$，又 $BD \subset 面BCD$， $CD \subset 面BCD$， $BD \cap CD = D$

所以 $AP \perp 面BCD$，则 $V_{P-ABC} = V_{P-BCD} + V_{A-BCD} = \frac{1}{3}PA \cdot S_{\Delta BCD}$，

在 ΔBCD 中， $BD = CD = \frac{2\sqrt{5}}{3}$， $\cos\angle BDC = -\frac{1}{10}$，

故 $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}DB \cdot DC \sin\angle BDC = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

则 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3}PA \cdot S_{\Delta BCD} = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

在 ΔABC 中， $AB = AC = 2$， $BC = \frac{2\sqrt{11}}{3}$，则 $S_{\Delta ABC} = \frac{5\sqrt{11}}{9}$.

设点 P 到底面 ABC 的距离为 h，则 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3}hS_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{11}}{3}$，故 $h = \frac{9}{5}$.

22、解：⑴设椭圆 E_2 的方程为 $\frac{x^2}{2m} + \frac{y^2}{m} = 1$，代入点 $(\sqrt{2},1)$ 得 $m = 2$，

所以椭圆 E_2 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

⑵因为椭圆 E_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $a^2 = 2b^2$，所以椭圆 $E_1: x^2 + 2y^2 = 2b^2$

又椭圆 E_2 与椭圆 E_1 "相似"，且 $m = 4$，所以椭圆 $E_1: x^2 + 2y^2 = 8b^2$，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$，

①方法一：由题意得 $b = 2$，所以椭圆 $E_1: x^2 + 2y^2 = 8$，将直线 $l: y = kx + 2$，

代入椭圆 $E_1: x^2 + 2y^2 = 8$ 得 $(1 + 2k^2)x^2 + 8kx = 0$，

解得 $x_1 = \frac{-8k}{1 + 2k^2}, x_2 = 0$，故 $y_1 = \frac{2 - 4k^2}{1 + 2k^2}, y_2 = 2$，

所以 $A(\frac{-8k}{1+2k^2},\frac{2-4k^2}{1+2k^2})$

又 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}$，即 B 为 AP 中点，所以 $P(\frac{8k}{1+2k^2},\frac{2+12k^2}{1+2k^2})$，

代入椭圆 $E_2:x^2+2y^2=32$ 得 $(\frac{8k}{1+2k^2})^2+2(\frac{2+12k^2}{1+2k^2})^2=32$，

即 $20k^4+4k^2-3=0$，即 $(10k^2-3)(2k^2+1)=0$，所以 $k=\pm\frac{\sqrt{30}}{10}$

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{30}}{10}x+2$

方法二：由题意得 $b=2$，所以椭圆 $E_1:x^2+2y^2=8$， $E_2:x^2+2y^2=32$

设 $A(x,y),B(0,2)$，则 $P(-x,4-y)$，

代入椭圆得 $\begin{cases}x^2+2y^2=8\\x^2+2(4-y)^2=32\end{cases}$，解得 $y=\frac{1}{2}$，故 $x=\pm\frac{\sqrt{30}}{2}$

所以 $k=\pm\frac{\sqrt{30}}{10}$，

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{30}}{10}x+2$ ....8 分

②方法一： 由题意得 $x_0^2+2y_0^2=8b^2,x_1^2+2y_1^2=2b^2,x_2^2+2y_2^2=2b^2$，

$\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{y_1}{x_1}=-\frac{1}{2}$，即 $x_0x_1+2y_0y_1=0$，

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，则 $(x_0-x_1,y_0-y_1)=\lambda(x_2-x_1,y_2-y_1)$，解得 $\begin{cases}x_2=\frac{x_0+(\lambda-1)x_1}{\lambda}\\y_2=\frac{y_0+(\lambda-1)y_1}{\lambda}\end{cases}$

所以 $(\frac{x_0+(\lambda-1)x_1}{\lambda})^2+2(\frac{y_0+(\lambda-1)y_1}{\lambda})^2=2b^2$

则 $x_0^2+2(\lambda-1)x_0x_1+(\lambda-1)^2x_1^2+2y_0^2+4(\lambda-1)y_0y_1+2(\lambda-1)^2y_1^2=2\lambda^2b^2$

$(x_0^2+2y_0^2)+2(\lambda-1)(x_0x_1+2y_0y_1)+(\lambda-1)^2(x_1^2+2y_1^2)=2\lambda^2b^2$

所以 $8b^2+(\lambda-1)^2\cdot2b^2=2\lambda^2b^2$，即 $4+(\lambda-1)^2=\lambda^2$，所以 $\lambda=\frac{5}{2}$

方法二：不妨设点 P 在第一象限，设直线 $OP:y=kx(k>0)$，代入椭圆 $E_2:x^2+2y^2=8b^2$，

解得 $x_0=\frac{2\sqrt{2}b}{\sqrt{1+2k^2}}$，则 $y_0=\frac{2\sqrt{2}bk}{\sqrt{1+2k^2}}$，

直线 OP,OA 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，则直线 $OA:y=-\frac{1}{2k}x$，代入椭圆 $E_1:x^2+2y^2=2b^2$，

解得 $x_1=-\frac{2bk}{\sqrt{1+2k^2}}$，则 $y_1=\frac{b}{\sqrt{1+2k^2}}$

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，则 $(x_0-x_1,y_0-y_1)=\lambda(x_2-x_1,y_2-y_1)$，解得 $\begin{cases}x_2=\frac{x_0+(\lambda-1)x_1}{\lambda}\\y_2=\frac{y_0+(\lambda-1)y_1}{\lambda}\end{cases}$，

所以 $(\frac{x_0+(\lambda-1)x_1}{\lambda})^2+2(\frac{y_0+(\lambda-1)y_1}{\lambda})^2=2b^2$

则 $x_0^2+2(\lambda-1)x_0x_1+(\lambda-1)^2x_1^2+2y_0^2+4(\lambda-1)y_0y_1+2(\lambda-1)^2y_1^2=2\lambda^2b^2$

$(x_0^2+2y_0^2)+2(\lambda-1)(x_0x_1+2y_0y_1)+(\lambda-1)^2(x_1^2+2y_1^2)=2\lambda^2b^2$

所以 $8b^2+2(\lambda-1)(\frac{2\sqrt{2}b}{\sqrt{1+2k^2}}\cdot(-\frac{2bk}{\sqrt{1+2k^2}})+2\frac{2\sqrt{2}bk}{\sqrt{1+2k^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{1+2k^2}})+(\lambda-1)^2\cdot 2b^2=2\lambda^2b^2$，

即 $8b^2+(\lambda-1)^2\cdot 2b^2=2\lambda^2b^2$，即 $4+(\lambda-1)^2=\lambda^2$，所以 $\lambda=\frac{5}{2}$.