江苏省南通中学线上课程居家测试

高二数学参考答案

一、单项选择题：（每题 5 分，共 60 分）

1．向量 $\boldsymbol{a}$＝(1，－2)所对应的复数是（　　）

A. z＝1＋2i　B. z＝1－2i　C. z＝－1＋2i　D. z＝－2＋i

【解答】 B

2．已知 A_n^2＝132，则 n 的值为(　　)

A. 11　　B. 12　　C. 13　　D. 以上都不对

【解答】B

3．函数 y＝$\sin x\cdot\cos x$ 的导数是(　　)

A. $y'=\cos^2x+\sin^2x$　B. $y'=\cos^2x-\sin^2x$　C. $y'=2\cos x\cdot\sin x$　D. $y'=\cos x\cdot\sin x$

【解答】 B

4．若正数 a，b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的最小值是(　　)

A.6　　B.9　　C.3　　D. 12

【解答】B

5．已知复数 z 满足 $|z|^2-2|z|-3=0$，则复数 z 对应点的轨迹是(　　)

A. 1 个圆　B. 线段　C. 2 个点　D. 2 个圆

【解答】A

6．曲线 $y=e^x$ 在点(2，e^2)处的切线与坐标轴所围三角形的面积为(　　)

A. $4e^2$　　B. $2e^2$　　C. e^2　　D. $\frac{1}{2}e^2$

【解答】D

7．设 $S=(x-1)^4+4(x-1)^3+6(x-1)^2+4(x-1)+1$，则 S 等于下式中的(　　)

A. $(x-2)^4$　B. $(x-1)^4$　C. x^4　D. $(x+1)^4$

【解答】C

8．楼道里有 12 盏灯，为了节约用电，需关掉 3 盏不相邻的灯，则关灯方案有(　　)

A. 56 种　B. 84 种　C. 120 种　D. 720 种

【解答】C

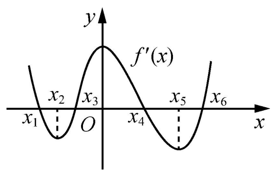
9. 函数 $f(x)$的定义域为 **R**，导函数 $f'(x)$的图象如图所示，则函数 $f(x)$(　　)

A. 无极大值点，有四个极小值点

B. 有三个极大值点，两个极小值点

C. 有两个极大值点，两个极小值点

D. 有四个极大值点，无极小值点



【解答】C

10．$(1+2x)^2(1-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，则 $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7$ 的值为(　　)

A. 32　　B. －32　　C. －33　　D. －31

【解答】D

11. 设F_1，F_2分别是椭圆E：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{2y^2}{9}=1$的左、右焦点，过点$F_1$的直线交椭圆$E$于$A$，$B$两点，$|AF_1|=3|BF_1|$，若$\cos\angle AF_2B=\dfrac{3}{5}$，则$AF_1$的长度为(　　)

A．1　　B．3　　C．6　　D．9

【解答】B

12．中国古代中的“礼、乐、射、御、书、数”合称“六艺”．“礼”，主要指德育；“乐”，主要指美育；“射”和“御”，就是体育和劳动；“书”，指各种历史文化知识；“数”，数学. 某校国学社团开展“六艺”课程讲座活动，每艺安排一节，连排六节，一天课程讲座排课有如下要求：“数”必须排在前三节，且“射”和“御”两门课程相邻排课，则“六艺”课程讲座不同排课顺序共有(　　)

A．120 种　　B．156 种　　C．188 种　　D．240 种

【解答】A

二、填空题:（每题 5 分，其中第 16 题，第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．若“$x<a$”是“$x^2>1$”的充分不必要条件，则 a 的取值范围为________.

【解答】$(-\infty,-1]$

14．设复数 $z=1+2i$，则$\dfrac{z^2+3}{z-1}=$________.

【解答】2

15．若函数$f(x)=(x^2-ax+2)e^x$在R上单调递增，则a的取值范围是________.

【解答】$[-2,2]$.

16．已知圆 C：$(x+3)^2+y^2=48$和点$B(3,0)$，P是圆上一点，线段BP的垂直平分线交CP于M点，则M点的轨迹方程为______；若直线l与M点的轨迹相交，且相交弦的中点为$P(2,1)$，则直线l的方程是______.

【解答】$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　$x+2y-4=0$

三、解答题:

17．(本小题 10 分)

设复数 $z=\lg(m^2-2m-2)+(m^2+3m+2)i$，当 m 为何值时，(1)z 是实数；(2)z 是纯虚数.

解　(1)要使复数 z 为实数，需满足$\begin{cases}m^2-2m-2>0,\\m^2+3m+2=0,\end{cases}$

解得 $m=-2$ 或 -1.

即当 $m=-2$ 或 -1 时，z 是实数.

(2)要使复数 z 为纯虚数，

需满足 $\begin{cases} m^2-2m-2=1, \\ m^2+3m+2\neq 0, \end{cases}$

解得 $m=3$.即当 $m=3$ 时，z 是纯虚数.

18．(本小题 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列，其前 n 项的和为 S_n，满足 $a_3=12$，____________.是否存在正整数 k，使得 $S_k>2020$？若存在，求 k 的最小值；若不存在，说明理由.

从① $q=2$，② $q=\dfrac{1}{2}$，③ $q=-2$ 这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

解　当 $q=2$ 时，存在，$k_{\min}=10$.

当 $q=\dfrac{1}{2}$ 时，不存在.

当 $q=-2$ 时，存在，$k_{\min}=11$.

理由分别如下：

当 $q=2$ 时，$a_1=3$，$a_n=3\cdot 2^{n-1}$，$S_n=\dfrac{3-3\cdot 2^n}{1-2}=3\cdot 2^n-3$

由 $3\cdot 2^k-3>2020$ 得 $2^k>674\dfrac{1}{3}$，$\because 2^9=512$，$2^{10}=1024$，$k\in N_+$，$\therefore k_{\min}=10$

当 $q=\dfrac{1}{2}$ 时，$a_1=48$，$a_n=48\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，$S_n=\dfrac{48-48\cdot(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=96-96\cdot(\dfrac{1}{2})^n$

由 $96-96\cdot(\dfrac{1}{2})^k>2020$ 得 $-\dfrac{481}{24}>(\dfrac{1}{2})^k$，不等式无解，此时不存在.

当 $q=-2$ 时，$a_1=3$，$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$，$S_n=\dfrac{3-3\cdot(-2)^n}{1-(-2)}=1-(-2)^n$

由 $1-(-2)^k>2020$ 得 $(-2)^k<-2019$，

$\because (-2)^9=-512$，$(-2)^{10}=1024$，$(-2)^{11}=-2048$，$k\in N_+$，$\therefore k_{\min}=11$

19．(本小题 12 分)

已知$(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2})^n$的展开式中第二项与第三项的二项式系数之和为 36．

(1)求n的值；

(2)求展开式中含$x^{\frac{3}{2}}$的项及展开式中二项式系数最大的项．

解　（1）由题意知 $\therefore C_n^1+C_n^2=36$，得：$n^2+n-72=0$，　得$n=8$或$n=-9$（舍去）．

(2)$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^8$的通项公式为：

$T_{k+1}=C_8^k(\sqrt{x})^{8-k}(-\frac{2}{x^2})^k=(-1)^k2^kC_8^kx^{\frac{8-5k}{2}}$，令 8－5k=3，求得 k=1，

故展开式中含$x^{\frac{3}{2}}$的项为$T_2=-2C_8^1x^{\frac{3}{2}}=-16x^{\frac{3}{2}}$．

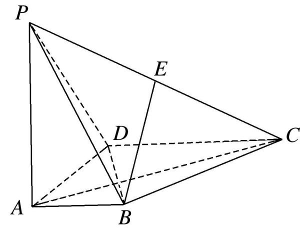
又由$n=8$知第 5 项的二项式系数最大，此时$T_5=1120x^{-6}$．

20．(本小题 12 分)

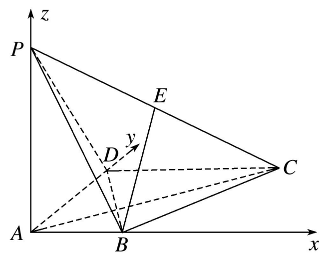
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$AD\perp AB$，$AB\parallel DC$，$AD=DC=AP=2$，$AB=1$，点 E 为棱 PC 的中点.

(1)求异面直线 BE 和 DC 所成角的大小；

(2)求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值.



解(1)　依题意，以点 A 为原点建立空间直角坐标系如图，可得 $B(1,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$.



由 E 为棱 PC 的中点，得 $E(1,1,1)$.

$\overrightarrow{BE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，故$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，所以 $BE\perp DC$.

所以异面直线 BE 和 DC 所成的角为$\frac{\pi}{2}$

(2)　$\overrightarrow{BD}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 PBD 的一个法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$　即$\begin{cases}-x+2y=0,\\ x-2z=0.\end{cases}$　不妨令 $y=1$，

可得 $\boldsymbol{n}=(2,1,1)$,于是有 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BE}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BE}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21．(本小题 12 分)
南通派出“最美逆行者”一行 *A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F*，6 名医务人员组成一支医疗队，奔赴武汉江夏区中医院参与疫情防控、治疗工作，安排到呼吸、重症、感染、检验四个科室中去。求：
（1）若每人都安排去一个科室，有多少种安排方法？
（2）若每人都安排去一个科室，每个科室至少有一人参加，有多少种安排方法？
（3）若每个科室只安排一人参加，A 不能去呼吸科，B 不能去检验科，则有多少种安排方法？
（4）若每人都安排去一个科室，每个科室至少有一人参加，A、B 不能去检验科，但能从事其他三项工作，其他四人都能胜任四个科室工作，则有多少种安排方法？

注：以上四问要有必要的解题过程，最后结果全部用数字作答.

解：（1）$4^6=4096$（2）1560

（3）252　（4）840

22．(本小题 12 分)

已知函数 $h(x)=-2ax+\ln x$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $h(x)$ 在 $(2,h(2))$ 处的切线方程；

（2）令 $f(x)=\frac{a}{2}x^2+h(x)$，已知函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1x_2>\frac{1}{2}$，求实数 a 的取值范围；

（3）在（2）的条件下，若存在 $x_0\in\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},2\right]$，使不等式 $f(x_0)+\ln(a+1)>m(a^2-1)-(a+1)+2\ln 2$

对任意 a（取值范围内的值）恒成立，求实数 m 的取值范围.

解：(1) 当 $a=1$ 时，$h(x)=-2x+\ln x, h'(x)=-2+\frac{1}{x}$

$x=2$ 时，$h'(2)=-\frac{3}{2}, h(2)=-4+\ln 2$

$\therefore h(x)$ 在 $(2,h(2))$ 处的切线方程为 $y+4-\ln 2=-\frac{3}{2}(x-2)$

化简得：$3x+2y-2\ln 2+2=0$

(2) 对函数求导可得，$f'(x)=\frac{ax^2-2ax+1}{x}(x>0)$

令 $f'(x)=0$，可得 $ax^2-2ax+1=0$

$\therefore\begin{cases}a\neq 0\\4a^2-4a>0\\\frac{1}{a}>\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 a 的取值范围为 $(1,2)$

(3) 由 $ax^2-2ax+1=0$，解得 $x_1=1-\frac{\sqrt{a^2-a}}{a}, x_2=1+\frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$

而 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_1\right)$ 上递增，在 $\left(x_1,x_2\right)$ 上递减，在 $\left(x_2,+\infty\right)$ 上递增

$\because 1<a<2$

$\therefore x_2=1+\dfrac{\sqrt{a^2-a}}{a}<1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left[1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},2\right]$ 单调递增

$\therefore$ 在 $\left[1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},2\right]$ 上，$f\left(x\right)_{\max}=f\left(2\right)=-2a+\ln 2$

$\therefore \exists x_0\in\left[1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},2\right]$，使不等式 $f\left(x_0\right)+\ln\left(a+1\right)>m\left(a^2-1\right)-\left(a+1\right)+2\ln 2$ 对 $\forall a\in M$ 恒成立

等价于不等式 $-2a+\ln 2+\ln(a+1)>m(a^2-1)-(a+1)+2\ln 2$ 恒成立

即不等式 $\ln(a+1)-ma^2-a+m-\ln 2+1>0$ 对任意的 $a\left(1<a<2\right)$ 恒成立

令 $g\left(a\right)=\ln\left(a+1\right)-ma^2-a+m-\ln 2+1$，则 $g\left(1\right)=0,g'\left(a\right)=\dfrac{-2ma\left(a+1+\dfrac{1}{2m}\right)}{a+1}$

①当 $m\ge 0$ 时，$g'\left(a\right)<0,g\left(a\right)$ 在 $\left(1,2\right)$ 上递减

$g\left(a\right)<g\left(1\right)=0$ 不合题意

②当 $m<0$ 时，$g'\left(a\right)=\dfrac{-2ma\left(a+1+\dfrac{1}{2m}\right)}{a+1}$

$\because 1<a<2$

若 $-\left(1+\dfrac{1}{2m}\right)>1$，即 $-\dfrac{1}{4}<m<0$ 时，则 $g\left(a\right)$ 在 $\left(1,2\right)$ 上先递减

$\because g\left(1\right)=0$　　$\therefore 1<a<2$ 时，$g\left(a\right)>0$ 不能恒成立

若 $-\left(1+\dfrac{1}{2m}\right)\le 1$，即 $m\le -\dfrac{1}{4}$，则 $g\left(a\right)$ 在 $\left(1,2\right)$ 上单调递增

$\therefore g\left(a\right)>g\left(1\right)=0$ 恒成立

$\therefore m$ 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right]$