

高一数学

一. 选择题: (3×12=36 分)

1. 已知 $\triangle ABC$ 中, $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab$, 那么 $\angle C$ 的大小是 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 已知点 $P(-3,5), Q(2,1)$, 向量 $\vec{m} = (2\lambda - 1, \lambda + 1)$, 若 $\vec{PQ} \parallel \vec{m}$, 则实数 λ 等于 ()

- A. $\frac{1}{13}$ B. $\frac{9}{13}$ C. $-\frac{1}{13}$ D. $-\frac{9}{13}$

3. 已知 $\triangle ABC$ 中, $a = 1, b = \sqrt{3}, A = 30^\circ$, 则 $\angle B$ 等于 ()

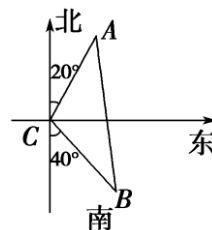
- A. 60° B. 120° C. 30° 或 150° D. 60° 或 120°

4. 已知平面向量 $\vec{a} = (-2, m), \vec{b} = (1, \sqrt{3})$, 且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则实数 m 的值为 ()

- A. $-2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $-4\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

5. 如图所示, 已知两座灯塔 A 和 B 与海洋观察站 C 的距离都等于 akm , 灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 20° , 灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 40° , 则灯塔 A 与灯塔 B 的距离为 ()

- A. akm B. $\sqrt{2}akm$ C. $\sqrt{3}akm$ D. $2akm$



6. 在 $\triangle ABC$ 中, $a \cos A = b \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

- A. 直角三角形 B. 等腰三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等腰三角形或直角三角形

7. 在 $\triangle ABC$ 中, M 为边 BC 上的任意一点, 点 N 在线段 AM 上, 且满足 $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AM}$, 若 $\vec{AN} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ ($\lambda, \mu \in R$), 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 4

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 M, N 分别在边 BC, CD 上, 且满足 $BC = 3MC, DC = 4NC$, 若 $AB = 4, AD = 3$, 则 $\vec{AN} \cdot \vec{MN} =$ ()

- A. $-\sqrt{7}$ B. 0 C. $\sqrt{7}$ D. 7

9. 平面内 $\triangle ABC$ 及一点 O 满足 $\frac{\vec{AO} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|}, \frac{\vec{CO} \cdot \vec{CA}}{|\vec{CA}|} = \frac{\vec{CO} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CB}|}$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()

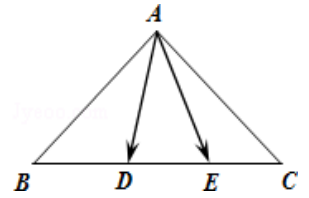
- A. 重心 B. 垂心 C. 内心 D. 外心

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $B = \frac{\pi}{6}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, $\sin A + \sin C = 2 \sin B$, 则 b 的值为 ()

- A. $4 + 2\sqrt{3}$ B. $4 - 2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3} - 1$ D. $\sqrt{3} + 1$

11. 如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB = AC = \sqrt{2}$, D, E 是线段 BC 上的点, 且 $DE = \frac{1}{3}BC$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的取值范围是 ()

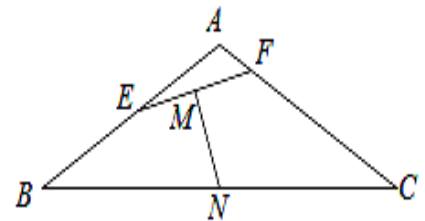
- A. $[\frac{8}{9}, \frac{4}{3}]$ B. $[\frac{4}{3}, \frac{8}{3}]$ C. $[\frac{8}{9}, \frac{8}{3}]$ D. $[\frac{4}{3}, +\infty)$



12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $b = 2\sqrt{2}$ 且 $\triangle ABC$ 面积为 $S = \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2 - a^2 - c^2)$, 则 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值为 ()
- A. $2 - \sqrt{3}$ B. $4 - 2\sqrt{3}$ C. $8 - 4\sqrt{3}$ D. $16 - 8\sqrt{3}$

二. 填空题 (3 × 6 = 18 分)

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $AB = 2$, $AC = 3$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于_____.
14. 已知点 $A(-1, 1), B(0, 3), C(3, 4)$, 则向量 \overrightarrow{AB} 在 \overrightarrow{AC} 方向上的投影为_____.
15. 已知向量 $\vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (\lambda, 1)$ 若 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角是锐角, 则实数 λ 的取值范围_____.
16. 若满足条件 $AB = \sqrt{3}, C = \frac{\pi}{3}$ 的 $\triangle ABC$ 有两个, 则边长 BC 的取值范围是_____.
17. 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 若 $A = 2B$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是_____.
18. 如图, 等腰三角形 ABC , $AB = AC = 2, \angle BAC = 120^\circ$. E, F 分别为边 AB, AC 上的动点, 且满足 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = n\overrightarrow{AC}$, 其中 $m, n \in (0, 1), m + n = 1$, M, N 分别是 EF, BC 的中点, 则 $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值为_____.



三. 解答题 (共 46 分)

19. (本小题满分 8 分) 设 \vec{e}_1, \vec{e}_2 是两个不共线的向量, 已知 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2, \overrightarrow{CB} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \overrightarrow{CD} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
- (1) 求证: A, B, D 三点共线;
- (2) 若 $\overrightarrow{BF} = 3\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$, 且 B, D, F 三点共线, 求 k 的值.
20. (本小题满分 8 分) 已知 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的内角, a, b, c 分别是其对边长, 向量 $\vec{m} = (2\sqrt{3}\sin \frac{A}{2}, \cos^2 \frac{A}{2}), \vec{n} = (\cos \frac{A}{2}, -2), \vec{m} \perp \vec{n}$.
- (1) 求角 A 的大小;
- (2) 若 $a = 2, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 b 的长.

21. (本小题满分 10 分) 已知 $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, (2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=61$.

(1) 求 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角 θ ;

(2) 求 $|\vec{a}+\vec{b}|$.

22. (本小题满分 10 分) 已知 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2b\cos C + c = 2a$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 BD 为 AC 边上的中线, $\cos A = \frac{1}{7}, BD = \frac{\sqrt{129}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 已知函数 $f(x) = \sin x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})$.

(1) 求 $f(x)$ 的对称轴所在直线方程及其对称中心;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $f(\frac{A}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, a = 4$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.