

# 2020届新建二中高三数学模拟试卷(三)

## 数 学(理科)

命题人:高四备课组

使用时间:2020.3.7

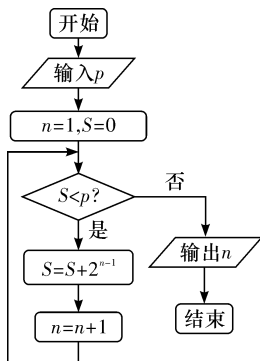
得分:\_\_\_\_\_

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共8页。时量120分钟。满分150分。

### 第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12个小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

- 设复数  $z$  满足  $z(1+i)^2=4i$ , 则复数  $z$  的共轭复数  $\bar{z}=$   
A. 2                      B. -2                      C.  $-2i$                       D.  $2i$
- 已知命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 \geq 0$ ; 命题  $q$ : 若  $a^2 < b^2$ , 则  $a < b$ , 下列命题为假命题的是  
A.  $p \vee q$                       B.  $p \vee (\neg q)$                       C.  $\neg p \vee q$                       D.  $\neg p \vee (\neg q)$
- 已知  $\left(x^3 + \frac{a}{x}\right)^n$  的展开式中各项的二项式系数之和为32, 且各项系数和为243, 则展开式中  $x^7$  的系数为  
A. 20                      B. 30                      C. 40                      D. 50
- 中国古代数学著作《算法统宗》中记载了这样的问题:“三百七十八里关,初行健步不为难,次日脚痛减一半,六朝才得到其关,要见次日行里数,请公仔细算相还”,其大意为:有一个人走了378里路,第一天健步行走,从第二天起其因脚痛每天走的路程为前一天的一半,走了6天后到达了目的地,问此人第三天走的路程里数为  
A. 192                      B. 48                      C. 24                      D. 88
- $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\sin A, \sin B, \sin C$  成等比数列, 且  $c=2a$ , 则  $\sin B$  的值为  
A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$                       C. 1                      D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 执行如图的程序框图, 若输出的  $n=6$ , 则输入整数  $p$  的最大值是



- A. 15                      B. 16                      C. 31                      D. 32

7. 已知变量  $x, y$  具有线性相关关系, 它们之间的一组数据如下表所示, 若  $y$  关于  $x$  的线性回归方程为  $\hat{y} = 1.3x - 1$ , 则  $m$  的值为

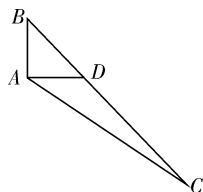
$x$	1	2	3	4
$y$	0.1	1.8	$m$	4

- A. 3.1                      B. 2.9                      C. 2                      D. 3
8. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 直线  $y = \sqrt{3}x$  与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 且  $AF \perp BF$ , 则  $C$  的离心率为

- A.  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$                       B.  $\sqrt{2}-1$
- C.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$                       D.  $\sqrt{3}-1$

9. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AD \perp AB$ ,  $\overrightarrow{DC} = 3 \overrightarrow{BD}$ ,  $|\overrightarrow{AD}| = 2$ , 则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$  的值为

- A. 3  
B. 8  
C. 12  
D. 16



10. 通过大数据分析, 每天从岳阳来长沙的旅客人数为随机变量  $X$ , 且  $X \sim N(3000, 50^2)$ . 则一天中从岳阳来长沙的旅客人数不超过 3100 的概率为 (参考数据: 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 有  $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ,  $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$ ,  $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$ )
- A. 0.0456                      B. 0.6826  
C. 0.9987                      D. 0.9772

11. 在水平地面上的不同两点处栽有两根笔直的电线杆, 假设它们都垂直于地面, 则在水平地面上视它们上端仰角相等的点  $P$  的轨迹可能是

①直线    ②圆    ③椭圆    ④抛物线

- A. ①②                      B. ①③                      C. ①②③                      D. ②④
12. 已知  $P = \{\alpha \mid f(\alpha) = 0\}$ ,  $Q = \{\beta \mid g(\beta) = 0\}$ , 若存在  $\alpha \in P, \beta \in Q$ , 使得  $|\alpha - \beta| < n$ , 则称函数  $f(x)$  与  $g(x)$  互为“ $n$  距零点函数”. 若  $f(x) = \log_{2020}(x-1)$  与  $g(x) = x^2 - ae^x$  ( $e$  为自然对数的底数) 互为“1 距零点函数”, 则实数  $a$  的取值范围为

- A.  $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e}\right]$                       B.  $\left(\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2}\right]$
- C.  $\left[\frac{4}{e^2}, \frac{2}{e}\right)$                       D.  $\left[\frac{4}{e^3}, \frac{2}{e^2}\right)$

## 选择题答题卡

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案												

## 第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $\int_0^3 |x-1| dx$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $y = \cos x$  与  $y = \sin(2x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ), 它们的图象有一个横坐标为  $\frac{\pi}{6}$  的交点, 则  $\varphi$  的值是\_\_\_\_\_.

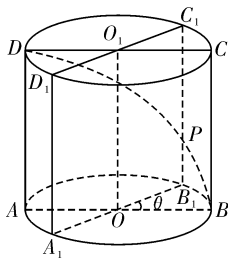
15. 一个圆上有 8 个点, 每两点连一条线段. 若其中任意三条线段在圆内不共点, 则所有线段在圆内的交点个数为\_\_\_\_\_ (用数字回答).

16. 已知  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 且  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$ , 则  $\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

三、解答题: 本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知圆柱  $OO_1$  底面半径为 1, 高为  $\pi$ ,  $ABCD$  是圆柱的一个轴截面, 动点  $M$  从点  $B$  出发沿着圆柱的侧面到达点  $D$ , 其距离最短时在侧面留下的曲线  $\Gamma$  如图所示. 将轴截面  $ABCD$  绕着轴  $OO_1$  逆时针旋转  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) 后, 边  $B_1C_1$  与曲线  $\Gamma$  相交于点  $P$ .



(1) 求曲线  $\Gamma$  的长度;

(2) 当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时, 求点  $C_1$  到平面  $APB$  的距离.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1=1, a_n>0, S_n^2=a_{n+1}^2-\lambda S_{n+1}$ , 其中  $\lambda$  为常数.

(1) 证明:  $S_{n+1}=2S_n+\lambda$ ;

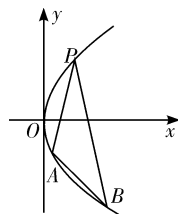
(2) 是否存在实数  $\lambda$ , 使得数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 若存在, 求出  $\lambda$ ; 若不存在, 说明理由.

19. (本小题满分 12 分)

如图,过抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  上一点  $P(1, 2)$ , 作两条直线分别交抛物线于  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 当  $PA$  与  $PB$  的斜率存在且倾斜角互补时:

(1) 求  $y_1 + y_2$  的值;

(2) 若直线  $AB$  在  $y$  轴上的截距  $b \in [-1, 3]$  时, 求  $\triangle ABP$  面积  $S_{\triangle ABP}$  的最大值.



20. (本小题满分 12 分)

为响应“文化强国建设”号召,并增加学生们对古典文学的学习兴趣,雅礼中学计划建设一个古典文学熏陶室. 为了解学生阅读需求,随机抽取 200 名学生做统计调查. 统计显示,男生喜欢阅读古典文学的有 64 人,不喜欢的有 56 人;女生喜欢阅读古典文学的有 36 人,不喜欢的有 44 人.

(1)能否在犯错误的概率不超过 0.25 的前提下认为喜欢阅读古典文学与性别有关系?

(2)为引导学生积极参与阅读古典文学书籍,语文教研组计划牵头举办雅礼教育集团古典文学阅读交流会. 经过综合考虑与对比,语文教研组已经在这 200 人中筛选出了 5 名男生代表和 4 名女生代表,其中有 3 名男生代表和 2 名女生代表喜欢古典文学. 现从这 9 名代表中任选 3 名男生代表和 2 名女生代表参加交流会,记  $\xi$  为参加交流会的 5 人中喜欢古典文学的人数,求  $\xi$  的分布列及数学期望  $E\xi$ .

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n=a+b+c+d$ .

参考数据:

$P(K^2 > k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05
$k_0$	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x \ln x + ax + 1, a \in \mathbf{R}$ .

(1) 当  $x > 0$  时, 若  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围;

(2) 当  $n \in \mathbf{N}^*$  时, 证明:  $\frac{n}{2n+4} < \ln^2 2 + \ln^2 \frac{3}{2} + \cdots + \ln^2 \frac{n+1}{n} < \frac{n}{n+1}$ .

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 3 - t, \end{cases}$  曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos \varphi}, \\ y = 2 \tan \varphi. \end{cases}$

(1) 求曲线  $C$  的右顶点到直线  $l$  的距离;

(2) 若点  $P$  的坐标为  $(1, 1)$ , 设直线  $l$  与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点, 求  $|PA| \cdot |PB|$  的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

(1) 已知  $a, b, c$  都是正实数, 证明:  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b+c} + \frac{c}{b} \geq 2$ ;

(2) 已知  $a, b, c, x, y, z$  都是正实数, 且满足不等式组:  $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ ax + by + cz = 6, \end{cases}$  求

$\frac{a+b+c}{x+y+z}$  的值.