100所名校高考模拟金典卷·数学(四)

(120 分钟　150 分)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x<1\}$,$B=\{x|2^x>1\}$,则

A. $A\cup B=\{x|x<1\}$　　B. $A\cup B=\{x|x>0\}$

C. $A\cap B=\{x|0<x<1\}$　　D. $A\cap B=\{x|x<0\}$

答案　C

命题意图　本题考查集合的运算;考查数学运算能力和判断能力.

解题分析　由 $2^x>1$ 得 $x>0$,所以 $B=\{x|x>0\}$.

所以 $A\cap B=\{x|0<x<1\}$,$A\cup B=\mathbf{R}$.

2. 若复数 $z=\frac{i}{1+i}$(i 为虚数单位),则 $z\cdot\bar{z}=$

A. $\frac{1}{2}i$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

答案　D

命题意图　本题考查复数的运算;考查数学运算能力.

解题分析　由题意可得 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=(\frac{|i|}{|1+i|})^2=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{1}{2}$.

3. 袋子中装有大小、形状完全相同的 2 个白球和 2 个红球,现从中不放回地摸取两个球,已知第二次摸到的是红球,则第一次摸到红球的概率为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{5}$

答案　B

命题意图　本题考查古典概型;考查抽象思维能力.

解题分析　设两个红球为 R_1,R_2,两个白球为 w_1,w_2,则第二次摸到的红球的所有可能结果为 w_1R_1,w_2R_1,R_2R_1,w_1R_2,w_2R_2,R_1R_2,共 6 种,其中第一次摸到红球的事件包括:R_2R_1,R_1R_2 共 2 种,结合排列组合公式可知第一次摸到红球的概率为 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

4. 已知角 θ 的终边经过点 $P(-\frac{5}{2},-6)$,则 $\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=$

A. $-\frac{7}{6}$　　B. $-\frac{17}{7}$　　C. -2　　D. $\frac{3\sqrt{19}}{2}$

答案　B

命题意图　本题考查三角恒等变换;考查数学运算能力与转换的思想.

解题分析　$\tan\theta=\frac{-6}{-\frac{5}{2}}=\frac{12}{5}$,所以 $\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=-\frac{17}{7}$.

5. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, x\geqslant 0,\\ mx+m-1, x<0\end{cases}$ 在其定义域上单调递增,则实数 m 的取值范围是

A. $(0,3]$　　B. $(0,3)$

C. $[3,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

答案　A

命题意图　本题考查分段函数的单调性;考查数学运算能力与抽象思维能力.

解题分析　$\because$ 函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, x\geqslant 0,\\ mx+m-1, x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 函数 $y=mx+m-1$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上为增函数,

$\therefore \begin{cases}m>0,\\ m-1\leqslant 2^0+1=2,\end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant 3$,

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(0,3]$.

6. 已知双曲线 $C: x^2-4y^2=1$,过点 $P(2,0)$ 的直线 l 与 C 有唯一公共点,则直线 l 的方程为

A. $y=2x-1$　　B. $y=-\frac{1}{2}x+1$

C. $y=\frac{1}{2}x-1$ 或 $y=-\frac{1}{2}x+1$　　D. $y=2x-1$ 或 $y=-\frac{1}{2}x+1$

答案　C

命题意图　本题考查双曲线的性质;考查数学运算能力与抽象思维能力.

解题分析　由双曲线的几何性质可知,当直线与渐近线平行时,直线 l 与 C 有唯一公共点,

由于双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,故直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x-2)$ 或 $y=-\frac{1}{2}(x-2)$,

即 $y=\frac{1}{2}x-1$ 或 $y=-\frac{1}{2}x+1$.

7. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B 的对边分别是 a,b,且 $A=60^\circ, b=2, a=x$,若解此三角形有两解,则 x 的取值范围是

A. $x>\sqrt{3}$　　B. $0<x<2$

C. $\sqrt{3}<x<2$　　D. $\sqrt{3}<x\leqslant 2$

答案　C

命题意图　本题考查解三角形,考查数学运算能力和逻辑思维能力.

解题分析　由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{x}$,$\because A=60^\circ$,$\therefore 0^\circ<B<120^\circ$,要使此三角形有两解,则 $60^\circ<B<120^\circ$,且 $B\neq 90^\circ$,即 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin B<1$,$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{x}<1$,解得 $\sqrt{3}<x<2$.

8. 二项式 $(2x^4-\frac{1}{3x^3})^n$ 的展开式中含有非零常数项,则正整数 n 的最小值为

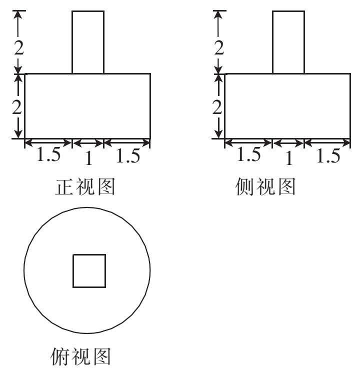
A. 7　　B. 12　　C. 14　　D. 5

答案　A

命题意图　本题考查二项式定理;考查数学运算能力.

解题分析　展开式的通项为 $T_{r+1}=(-\frac{1}{3})^r 2^{n-r} C_n^r x^{4n-7r}$,令 $4n-7r=0$,则 $n=\frac{7r}{4}$,当 $r=4$ 时,n 取最小值,最小值为7,故选A项.

9. 榫卯(sǔnmǎo)是两个木构件上所采用的一种凹凸结合的连接方式. 凸出的部分叫榫,凹进去的部分叫卯,榫和卯咬合,起到连接作用. 代表建筑有北京的紫禁城、天坛祈年殿,山西悬空寺等,如图是一种榫卯构件中榫的三视图,则该榫的表面积和体积分别为



正视图　侧视图　俯视图

A. $8+16\pi,2+8\pi$

B. $9+16\pi,2+8\pi$

C. $8+16\pi,4+8\pi$

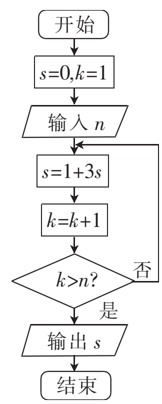
D. $9+16\pi,4+8\pi$

答案　A

命题意图　本题考查数学文化背景下的三视图问题;考查空间想象能力.

解题分析　由三视图知该榫头是由上下两部分构成:上方为长方体(底面为边长是1的正方形,高为2),下方为圆柱(底面圆半径为2,高为2).其表面积为圆柱的表面积加上长方体的侧面积,所以 $S=2\times(2\pi\times2)+2(\pi\times2^2)+4(1\times2)=8+16\pi$. 其体积为圆柱与长方体体积之和,所以 $V=(\pi\times2^2)\times2+1\times1\times2=8\pi+2$.

10. 运行如图所示的程序框图,如果输入某个正整数 n 后,输出的 $s\in(20,50)$,那么 n 的值为



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

答案　B

命题意图　本题考查程序框图;考查逻辑推理能力与数学运算能力.

解题分析　依次运行框图中的程序,可得:

第一次,$s=1+3\times0=1,k=2$;

第二次,$s=1+3\times1=4,k=3$;

第三次,$s=1+3\times4=13,k=4$;

第四次,$s=1+3\times13=40,k=5$;

第五次,$s=1+3\times40=121,k=6$;

……

因为输出的 $s\in(20,50)$,

所以程序运行完第四次即可满足题意,所以判断框中 n 的值为4.

满分导考　错←→学

此类试题的常考题型、分值、难度、考频	失分陷阱
程序框图是高考客观题常考知识点,分值5分,难度中等,考查形式有:(1)判断程序运行的结果;(2)判断程序框图的算法;(3)补全程序框图	该类试题的失分点主要表现为对循环终止条件的判断错误
得分要点 满分秘诀:程序框图的补全及逆向求解问题思路:①先假设参数的判断条件满足或不满足;②运行循环结构,一直到运行结果与题目要求的输出结果相同为止;③根据此时各个变量的值,补全程序框图	

11. 已知定义在非零实数集上的奇函数 $y=f(x)$,函数 $y=f(x-2)$ 与 $g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 的图象共有

4 个交点,则该 4 个交点的横坐标之和为

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

答案　D

命题意图　本题考查函数性质的综合应用;考查抽象思维能力和数形结合的思想.

解题分析　因为函数 $y=f(x)$ 是奇函数,$y=f(x)$ 关于点 $(0,0)$ 中心对称,所以函数 $y=f(x-2)$ 关于点 $(2,0)$ 中心对称,又由 $\frac{\pi x}{2}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 得到 $x=2k,k\in\mathbf{Z}$,即函数 $g(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ 的对称中心为 $(2k,0),k\in\mathbf{Z}$,因此,点 $(2,0)$ 也是函数 $g(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ 的一个对称中心,

因为函数 $y=f(x-2)$ 与 $g(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ 的图象共有 4 个交点,交点横坐标依次设为 x_1,x_2,x_3,x_4,且 $x_1<x_2<x_3<x_4$,所以由函数对称性可知 $\frac{x_1+x_4}{2}=2,\frac{x_2+x_3}{2}=2$,因此 $x_1+x_2+x_3+x_4=8$.

12. 已知函数 $f(x)=ax-e^x-k$,若 $k\in[-1,e]$ 时,函数 $f(x)$ 至少有 2 个零点,其中 e 为自然对数的底数,则实数 a 的取值范围是

A. $(e^2,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(1,e^2)$　　D. $(0,1)$

答案　A

命题意图　本题考查零点问题;考查数学运算能力、抽象思维能力与化归转化的思想.

解题分析　由题意可知方程 $ax-e^x=k,k\in[-1,e^2]$ 上至少有两个实数根,

即 $e^x=ax-k,k\in[-1,e^2]$ 上至少有两个实数根,

考查临界情况,当 $k=e^2$ 时,直线 $y=ax-e^2$ 与指数函数 $y=e^x$ 相切,

由 $y=e^x$ 可得 $y'=e^x$,则切点坐标为 (x_0,e^{x_0}),切线斜率 $k=y'|_{x=x_0}=e^{x_0}$,

切线方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$,切线过点 $(0,-e^2)$,

故 $-e^2-e^{x_0}=e^{x_0}(0-x_0)$,很明显方程的根为 $x_0=2$,此时切线的斜率 $k=e^2$.

故实数 a 的取值范围是 $(e^2,+\infty)$.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在题中的横线上.

13. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个单位向量,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为________.

答案　$\frac{\sqrt{5}}{5}$

命题意图　本题考查向量的夹角;考查数学运算能力.

解题分析　因为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个单位向量,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$,

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

14. 椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=m(m>0)$ 的离心率为________.

答案　$\frac{3}{4}$

命题意图　本题考查椭圆的离心率,考查数学运算能力.

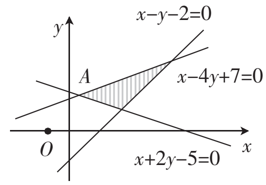
解题分析　$a=4\sqrt{m},c=3\sqrt{m},e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{m}}{4\sqrt{m}}=\frac{3}{4}$.

15. 已知 $x,y\in \mathbf{R}$,满足$\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\x+2y-5\geqslant 0,\\x-4y+7\geqslant 0,\end{cases}$则 $z=y-4x$ 的最大值为__________.

答案　-2

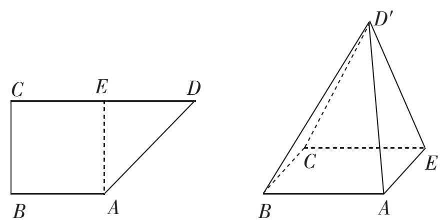
命题意图　本题考查线性规划;考查数学运算能力与数形结合的思想.

解题分析　由约束条件$\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\x+2y-5\geqslant 0,\\x-4y+7\geqslant 0\end{cases}$作出可行域如图所示,



由$\begin{cases}x+2y-5=0,\\x-4y+7=0,\end{cases}$得 $A(1,2)$,所以 $z_{\max}=2-4=-2$.

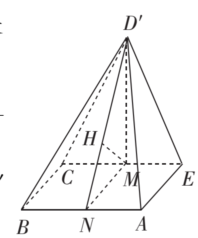
16. 如图,在直角梯形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=90^\circ$,$CD=2$,$AB=BC=1$,E 是边 CD 的中点,$\triangle ADE$ 沿 AE 翻折成四棱锥 $D'-ABCE$,则点 C 到平面 ABD'距离的最大值为________.



答案　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

命题意图　本题考查利用基本不等式解决空间几何体中点到面的距离最大问题;考查逻辑推理能力和空间想象能力.

解题分析　由翻折过程可得,在如图所示的四棱锥 $D'-ABCE$ 中,底面 $ABCE$ 为边长是 1 的正方形,侧面 $D'EA$ 中,$D'E\perp AE$,且 $D'E=AE=1$.



$\because AE\perp D'E,AE\perp CE,D'E\cap CE=E,\therefore AE\perp$平面 $D'CE$,作 $D'M\perp CE$ 于 M,作 $MN\perp AB$ 于 N,连接 $D'N$,则由 $AE\perp$平面 $D'CE$,可得 $D'M\perp AE$,$\therefore D'M\perp$平面 $ABCE$.

又$\because AB\subset$平面 $ABCE$,$\therefore D'M\perp AB$,$\because MN\perp AB,D'M\cap MN=M$,$\therefore AB\perp$平面 $D'MN$.

在$\triangle D'MN$ 中,作 $MH\perp D'N$ 于 H,则 $MH\perp$平面 ABD',

$\because$由题意可得 $CE/\!/$平面 ABD',$\therefore MH$ 即为点 C 到平面 ABD'的距离,

在 $\mathrm{Rt}\triangle D'MN$ 中,$D'M\perp MN,MN=1$,设 $D'M=x$,则 $0<x\leqslant D'E=1$,$\therefore D'N=\sqrt{1+x^2}$.

由 $D'M\cdot MN=D'N\cdot MH$ 可得 $x=\sqrt{1+x^2}\cdot MH$,

$\therefore MH=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,当 $x=1$ 时等号成立,此时 $D'E\perp$平面 $ABCE$,

综上可得,点 C 到平面 ABD'距离的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

(一)必考题：共60分．

17．(本小题满分12分)

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是首项为1，公差为2的等差数列．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{b_n\}$满足$\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}=5-(4n+5)(\dfrac{1}{2})^n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

命题意图　本题考查数列的通项公式与前n项和；考查数学运算能力．

解题分析　(1)由题意可得$\dfrac{S_n}{n}=1+2(n-1)$，可得$S_n=2n^2-n$．

∴当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-n-[2(n-1)^2-(n-1)]=4n-3$．

当$n=1$时，$a_1=1$对上式也成立．

∴$a_n=4n-3(n\in\mathbf{N}^*)$．……………………………………………………………………………… 6分

(2)∵$\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}=5-(4n+5)(\dfrac{1}{2})^n$，

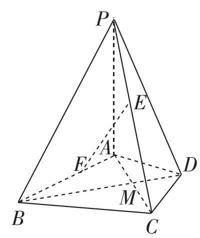
∴当$n\geqslant 2$时，$\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}}=5-(4n+1)(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，

两式相减可得$\dfrac{a_n}{b_n}=(4n-3)\times(\dfrac{1}{2})^n(n\geqslant 2)$，又$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{1}{2}$满足上式，

∴$\dfrac{a_n}{b_n}=(4n-3)\times(\dfrac{1}{2})^n(n\in\mathbf{N}^*)$．∴$b_n=2^n$，∴数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$．…… 12分

18．(本小题满分12分)

在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$\triangle ABC$是正三角形，AC与BD的交点M恰好是AC的中点，又$PA=AB=4$，$\angle CDA=120°$．



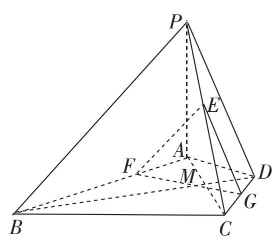
(1)求证：$BD\perp PC$．

(2)设E为PC的中点，点F在线段AB上，若直线$EF\parallel$平面PAD，求AF的长；

(3)求二面角$A-PC-B$的余弦值．

命题意图　本题考查空间点、线、面的位置关系和空间向量；考查空间想象能力与逻辑推理能力．

解题分析　(1)∵$\triangle ABC$是正三角形，M是AC的中点，∴$BM\perp AC$，即$BD\perp AC$．



又∵$PA\perp$平面$ABCD$，∴$PA\perp BD$．

又$PA\cap AC=A$，∴$BD\perp$平面PAC，∴$BD\perp PC$．………………………… 3分

(2)取DC的中点G，连接FG，EG，则$EG\parallel$平面PAD，

又直线$EF\parallel$平面PAD，$EG\cap EF=E$，所以平面$EFG\parallel$平面PAD，所以$FG\parallel AD$，∵MG是$\triangle CAD$的中位线，∴点M在FG上，

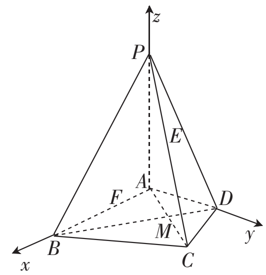
∵M为AC的中点，$DM\perp AC$，∴$AD=CD$，

∵$\angle ADC=120°$，$AB=4$，∴$\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=90°$，

则三角形AMF为直角三角形，又$\angle AMF=30°$，故$AF=1$．……………………………………………… 7分

(3)分别以AB，AD，AP为x轴，y轴，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，

∴$B(4,0,0)$，$C(2,2\sqrt{3},0)$，$D(0,\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0)$，$P(0,0,4)$，



$\overrightarrow{DB}=(4,-\frac{4\sqrt{3}}{3},0)$为平面 PAC 的法向量，$\overrightarrow{PC}=(2,2\sqrt{3},-4)$，$\overrightarrow{PB}=(4,0,-4)$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}2x+2\sqrt{3}y-4z=0,\\ 4x-4z=0,\end{cases}$

令 $z=3$，得 $x=3$，$y=\sqrt{3}$，则平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,\sqrt{3},3)$，

设二面角 $A-PC-B$ 的大小为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DB}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. ………………………………………… 12 分

19.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一点 $P(x_0,2)$ 到焦点 F 的距离 $|PF|=2x_0$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过点 P 引圆 $M:(x-3)^2+y^2=r^2(0<r\leqslant\sqrt{2})$ 的两条切线 PA、PB，切线 PA、PB 与抛物线 C 的另一交点分别为 A，B，线段 AB 中点的横坐标记为 x_0，求实数 x_0 的取值范围.

命题意图　本题考查直线与抛物线的位置关系；考查数学运算能力和转化化归的思想.

解题分析　(1)由抛物线定义，得 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$，

由题意得 $\begin{cases}2x_0=x_0+\frac{p}{2}\\ 2px_0=4\\ p>0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}p=2\\ x_0=1\end{cases}$，所以抛物线的方程为 $y^2=4x$. ………………………………… 4 分

(2)由题意知，过点 P 引圆 $(x-3)^2+y^2=r^2(0<r\leqslant\sqrt{2})$ 的切线斜率存在，设切线 PA 的方程为 $y=k_1(x-1)+2$，则圆心 M 到切线 PA 的距离 $d=\frac{|2k_1+2|}{\sqrt{k_1^2+1}}=r$，$(r^2-4)k_1^2-8k_1+r^2-4=0$.

设切线 PB 的方程为 $y=k_2(x-1)+2$，同理可得 $(r^2-4)k_2^2-8k_2+r^2-4=0$，

所以，k_1，k_2 是方程 $(r^2-4)k^2-8k+r^2-4=0$ 的两根，$k_1+k_2=\frac{8}{r^2-4}$，$k_1k_2=1$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y=k_1(x-1)+2\\ y^2=4x\end{cases}$，得 $k_1y^2-4y-4k_1+8=0$，

由韦达定理知 $2y_1=\frac{8-4k_1}{k_1}$，所以 $y_1=\frac{4-2k_1}{k_1}=\frac{4}{k_1}-2=4k_2-2$，同理可得 $y_2=4k_1-2$.

则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{8}=\frac{(4k_2-2)^2+(4k_1-2)^2}{8}$

$=2(k_1^2+k_2^2)-2(k_1+k_2)+1=2(k_1+k_2)^2-2(k_1+k_2)-3$，

设 $t=k_1+k_2$，则 $t=\frac{8}{r^2-4}\in[-4,-2)$，

所以 $x_0=2t^2-2t-3$，对称轴 $t=\frac{1}{2}>-2$，所以 $9<x_0\leqslant37$. ………………………………… 12 分

20.（本小题满分 12 分）

交强险是车主必须为机动车购买的险种，若普通 6 座以下私家车投保交强险第一年的费用（基准保费）统一为 a 元，在下一年续保时，实行的是费率浮动机制，保费与上一年度车辆发生道路交通事故的情况相联系，发生交通事故的次数越多，费率也就越高，具体浮动情况如

下表：

交强险浮动因素和浮动费率比率表		
	浮动因素	浮动比率
A_1	上一年度未发生有责任道路交通事故	下浮 10%
A_2	上两年度未发生有责任道路交通事故	下浮 20%
A_3	上三年度未发生有责任道路交通事故	下浮 30%
A_4	上一个年度发生一次有责任不涉及死亡的道路交通事故	0%
A_5	上一个年度发生两次及两次以上有责任不涉及死亡的道路交通事故	上浮 10%
A_6	上一个年度发生有责任交通死亡事故	上浮 30%

某机构为了解某一品牌普通 6 座以下私家车的投保情况，随机抽取了 60 辆车龄已满三年的该品牌同型号私家车的下一年续保时的情况，统计得到了下面的表格：

类型	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
数量	10	5	5	20	15	5

以这 60 辆该品牌车的投保类型的频率代替一辆车投保类型的概率，完成下列问题：

(1)按照我国《机动车交通事故责任强制保险条例》汽车交强险价格的规定，$a=950$，记 X 为某同学家的一辆该品牌车在第四年续保时的费用，求 X 的分布列与数学期望；(数学期望值保留到个位数字)

(2)某二手车销售商专门销售这一品牌的二手车，且将下一年的交强险保费高于基本保费的车辆记为事故车，假设购进一辆事故车亏损 5000 元，一辆非事故车盈利 10000 元：

①若该销售商购进三辆(车龄已满三年)该品牌二手车，求这三辆车中至多有一辆事故车的概率；

②若该销售商一次购进 100 辆(车龄已满三年)该品牌二手车，求他获得利润的期望值.

命题意图　本题考查离散型随机变量的分布列、数学期望的求法及应用，考查数学建模能力和函数与方程思想.

解题分析　(1)由题意可知：X 的可能取值为 $0.9a,0.8a,0.7a,a,1.1a,1.3a$，

由统计数据可知 $P(X=0.9a)=\frac{1}{6}$，$P(X=0.8a)=\frac{1}{12}$，$P(X=0.7a)=\frac{1}{12}$，$P(X=a)=\frac{1}{3}$，$P(X=1.1a)=\frac{1}{4}$，$P(X=1.3a)=\frac{1}{12}$，

所以 X 的分布列为

X	$0.9a$	$0.8a$	$0.7a$	a	$1.1a$	$1.3a$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$EX=0.9a\times\frac{1}{6}+0.8a\times\frac{1}{12}+0.7a\times\frac{1}{12}+a\times\frac{1}{3}+1.1a\times\frac{1}{4}+1.3a\times\frac{1}{12}=\frac{11.9a}{12}=\frac{11305}{12}\approx942.$ …………… 6 分

(2)①由统计数据可知任意一辆该品牌车龄已满三年的二手车为事故车的概率的为$\frac{1}{3}$，三辆车中至多有一辆事故车的概率为 $P=(1-\frac{1}{3})^3+C_3^1\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2=\frac{20}{27}$.

②设 Y 为给销售商购进并销售一辆二手车的利润，Y 的可能取值为 $-5000,10000$.

所以 Y 的分布列为

Y	-5000	10000
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

所以 $EY=-5000\times\frac{1}{3}+10000\times\frac{2}{3}=5000$.

所以该销售商一次购进100辆该品牌车龄已满三年的二手车获得利润的期望值为 $100\times EY=50$ 万元.

…………………………………………………………………………………………………… 12分

21.(本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a-1}{x}$,$g(x)=\frac{a(\sin x+1)-2}{x}$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极小值;

(2)求证:当 $a\in[0,1]$ 时,$f(x)>g(x)$.

命题意图 本题考查导数的综合应用;考查数学运算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力.

解题分析 (1)$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a-1}{x^2}=\frac{x-(a-1)}{x^2}(x>0)$,

当 $a-1\leqslant 0$,即 $a\leqslant 1$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,无极小值;

当 $a-1>0$,即 $a>1$ 时,$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<a-1$,函数 $f(x)$ 在 $(0,a-1)$ 上单调递减.

$f'(x)>0\Rightarrow x>a-1$,函数 $f(x)$ 在 $(a-1,+\infty)$ 上单调递增,$f(x)_{极小}=f(a-1)=1+\ln(a-1)$,

综上所述,当 $a\leqslant 1$ 时,$f(x)$ 无极小值;当 $a>1$ 时,$f(x)_{极小}=1+\ln(a-1)$. ………………………… 4分

(2)令 $F(x)=f(x)-g(x)=\ln x+\frac{a-1}{x}-\frac{a(\sin x+1)-2}{x}=\frac{x\ln x-a\sin x+1}{x}(x>0)$,

当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时,要证 $f(x)>g(x)$,即证 $F(x)>0$,即证 $x\ln x-a\sin x+1>0$,

要证 $x\ln x-a\sin x+1>0$,即证 $x\ln x>a\sin x-1$,

①当 $0<a\leqslant 1$ 时,令 $h(x)=x-\sin x$,$h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

故 $h(x)>h(0)=0$,即 $x>\sin x$. $\therefore ax-1>a\sin x-1$, (*)

令 $q(x)=x\ln x-x+1$,$q'(x)=\ln x$,

当 $x\in(0,1)$ 时,$q'(x)<0$,$q(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$q'(x)>0$,$q(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,故 $q(x)\geqslant q(1)=0$,即 $x\ln x\geqslant x-1$,当且仅当 $x=1$ 时取等号.

又 $\because 0<a\leqslant 1$,$\therefore x\ln x\geqslant x-1\geqslant ax-1$, (**)

由(*)、(**)可知 $x\ln x\geqslant x-1\geqslant ax-1>a\sin x-1$,所以当 $0<a\leqslant 1$ 时,$x\ln x>a\sin x-1$.

②当 $a=0$ 时,即证 $x\ln x>-1$. 令 $m(x)=x\ln x$,$m'(x)=\ln x+1$,$m(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减,在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增,$m(x)_{\min}=m(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}>-1$,故 $x\ln x>-1$.

综上①②可知,当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时,$f(x)>g(x)$. ………………………………………………… 12分

(二)选考题:共10分. 请考生在第22、23两题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](本小题满分10分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),在以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=a\sin\theta(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0)$.

(1)求直线 l 的极坐标方程及曲线 C 的直角坐标方程;

(2)已知$A(\rho_1,\theta)$是直线l上的一点,$B(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{6})$是曲线$C$上的一点,$\rho_1\in\mathbf{R}$,$\rho_2\in\mathbf{R}$,若$\frac{|OB|}{|OA|}$的最大值为2,求实数$a$的值.

命题意图 本题考查坐标系与参数方程;考查数学运算能力与抽象思维能力.

解题分析 (1)消去参数t,得直线l的普通方程为$\sqrt{3}x-y+1=0$,

由$x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,

得直线l的极坐标方程为$\rho(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)+1=0$,即$\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$.

曲线C的极坐标方程为$\rho=a\sin\theta(a\in\mathbf{R}$且$a\neq0)$,即$\rho^2=a\rho\sin\theta$,

由$\rho^2=x^2+y^2$,$\rho\sin\theta=y$,得曲线C的直角坐标方程为$x^2+y^2-ay=0$. ………………………… 5分

(2)∵$A(\rho_1,\theta)$在直线l上,$B(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{6})$在曲线$C$上,

∴$\rho_1\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$,$\rho_2=a\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$,

∴$\frac{|OB|}{|OA|}=\frac{|\rho_2|}{|\rho_1|}=|2a\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\sin(\theta-\frac{\pi}{3})|$

$=|2a\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\cos(\theta+\frac{\pi}{6})|=|a\sin(2\theta+\frac{\pi}{3})|\leqslant|a|$.

∴$|a|=2$,$a=\pm2$. ………………………………………………………………………… 10分

23.[选修4—5:不等式选讲](本小题满分10分)

设函数$f(x)=|1-x|-|x+3|$.

(1)求不等式$f(x)\leqslant1$的解集;

(2)若函数$f(x)$的最大值为m,正实数p,q满足$p+2q=m$,求$\frac{2}{p+2}+\frac{1}{q}$的最小值.

命题意图 本题考查绝对值不等式与基本不等式;考查数学运算能力与逻辑思维能力.

解题分析 (1)不等式可化为$\begin{cases}x\leqslant-3\\1-x+x+3\leqslant1\end{cases}$或$\begin{cases}-3<x<1\\1-x-x-3\leqslant1\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant1\\x-1-x-3\leqslant1\end{cases}$,解得$x\geqslant-\frac{3}{2}$.

∴$f(x)\leqslant1$的解集为$\{x|x\geqslant-\frac{3}{2}\}$. ………………………………………………… 4分

(2)$|1-x|-|x-3|\leqslant|1-x+x+3|=4$,∴$m=4$,$p+2q=4$,∴$(p+2)+2q=6$,

$\frac{2}{p+2}+\frac{1}{q}=\frac{1}{6}(\frac{2}{p+2}+\frac{1}{q})(p+2+2q)=\frac{1}{6}(4+\frac{4q}{p+2}+\frac{p+2}{q})\geqslant\frac{1}{6}(4+2\sqrt{\frac{4q}{p+2}\cdot\frac{p+2}{q}})=\frac{4}{3}$.

当且仅当$p+2=2q=3$时,即$\begin{cases}p=1\\q=\frac{3}{2}\end{cases}$时,取“=”,

∴$\frac{2}{p+2}+\frac{1}{q}$的最小值为$\frac{4}{3}$. ………………………………………………………… 10分

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	B	A	C	C	A	A	B	D	A