

2020年普通高等学校招生全国统一考试

最新模拟卷·理科数学(二)

时量:120 分钟

满分:150 分

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

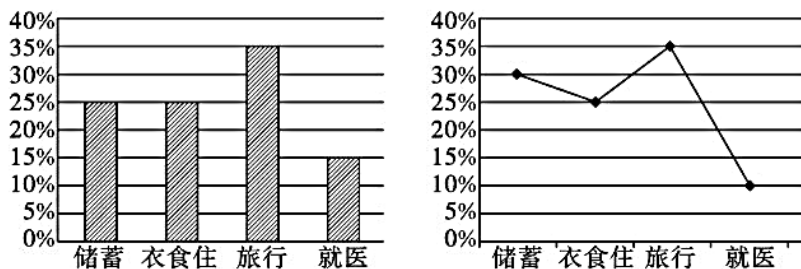
1. 已知集合 $A = \{x \mid |x-1| > 1\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()

A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{0, 2\}$ C. $\{-1, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

2. 若复数 z 满足 $z \cdot (1+i) = -2i$, 则 $|z| =$ ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

3. 若干年前,某教师刚退休的月退休金为 6000 元,月退休金各种用途占比统计图如下面的条形图.该教师退休后加强了体育锻炼,目前月退休金的各种用途占比统计图如下面的折线图.已知目前的月就医费比刚退休时少 100 元,则目前该教师的月退休金为 ()



A. 6500 元 B. 7000 元 C. 7500 元 D. 8000 元

4. 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点与右顶点的直线方程为 $x + 2y - 4 = 0$, 则椭圆 C 的标准方程为 ()

A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$

5. 将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再将所得图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 则所得图象对应的函数解析式为 ()

A. $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ B. $y = \sin(4x + \frac{2\pi}{3})$ C. $y = \cos x$ D. $y = \sin 4x$

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = 120^\circ$, $|AB| = 2$, $|AD| = 1$, 若 E 为线段 AB 的中点, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ()

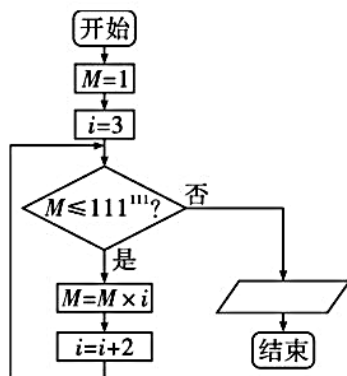
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

7. 已知三个村庄 A, B, C 构成一个三角形, 且 $AB = 5$ km, $BC = 12$ km, $AC = 13$ km. 为了方便市民生活, 现在 $\triangle ABC$ 内任取一点 M 建一大型生活超市, 则 M 到 A, B, C 的距离都不小于 2 km 的概率为 ()

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $1 - \frac{\pi}{15}$ D. $\frac{\pi}{15}$

8. 下面框图的功能是求满足 $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times n > 111^{111}$ 的最小正整数 n , 则空白处应填入的是

()



- A. 输出 $i+2$ B. 输出 i C. 输出 $i-1$ D. 输出 $i-2$

9. 若 $\sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sin(\frac{\pi}{6} + 2\alpha) =$

()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

10. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直, $AA_1 = BC = 2$, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的体积为

()

- A. $12\sqrt{3}\pi$ B. $8\sqrt{3}\pi$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $4\sqrt{3}\pi$

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线, 交双曲线右支于点 M , 若 $\angle F_1MF_2 = 45^\circ$, 则双曲线的离心率为

()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{5}$

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义域在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且 $f(x+1) = f(x-1)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^3$, 则关于 x 的方程 $f(x) = |\cos \pi x|$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ 上所有实数解之和为

()

- A. 1 B. 3 C. 6 D. 7

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 把答案填在答题卡中对应题号的横线上.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $C = \frac{\pi}{3}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$, 则 $A =$ _____.

14. 若二项式 $(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项为 m , 则 $\int_1^m 3x^2 dx =$ _____.

15. 已知直线 l, m 与平面 α, β , $l \subset \alpha, m \subset \beta$, 则下列命题中正确的是_____ (填写正确命题对应的序号).

- ①若 $l \parallel m$, 则 $\alpha \parallel \beta$; ②若 $l \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$;
③若 $l \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$; ④若 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \alpha$.

16. 已知 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ |x^2 - 9| - 3, & x > 1, \end{cases}$ $g(x) = |\ln x|$, 若函数 $y = f(x) + g(x) - m (x > 0)$ 恰有两个不相等的零点, 则实数 m 的取值范围为_____.

三、解答题:共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $a_n - \frac{S_n}{2} = 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

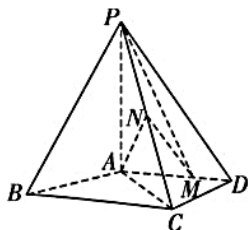
(2)已知 $b_n = \frac{2^n}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)} (n \in \mathbf{N}^*)$,数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和记为 T_n ,证明: $T_n \in [\frac{2}{3}, 1)$.

18. (本小题满分 12 分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, M 为线段 AD 上一点, $AM = 2MD$, N 为 PC 的中点.

(1)证明 $MN \parallel$ 平面 PAB ;

(2)求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.



19. (本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中,椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点 F 是椭圆 C 的一个焦点.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设椭圆的左、右顶点分别为 A, B , M 是椭圆上异于 A, B 的任意一点,直线 MF 交椭圆 C 于另一点 N ,直线 MB 交直线 $x = 4$ 于点 Q ,求证: A, N, Q 三点在同一条直线上.

20. (本小题满分 12 分)

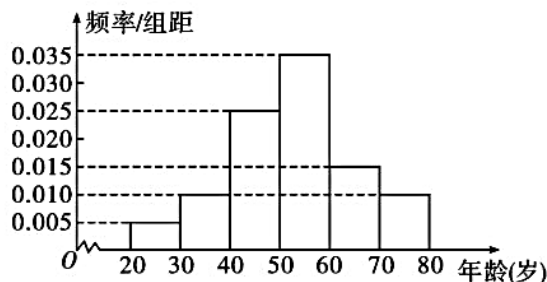
已知函数 $f(x) = e^{ax} (x^2 - \frac{a+2}{a})$,其中 $a \neq 0$.

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的倾斜角;

(2)若函数 $f(x)$ 的极小值小于 0,求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

2018 年是中国改革开放的第 40 周年,为了充分认识新形势下改革开放的时代性,某地的民调机构随机选取了该地的 100 名市民进行调查,将他们的年龄分成 6 段: $[20, 30)$, $[30, 40)$, \dots , $[70, 80)$, 并绘制了如图所示的频率分布直方图.



(1) 现从年龄在 $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$ 内的人

员中按分层抽样的方法抽取 8 人,再从这 8 人中随机抽取 3 人进行座谈,用 X 表示年龄在 $[30, 40)$ 内的人数,求 X 的分布列和数学期望;

(2) 若用样本的频率代替概率,用随机抽样的方法从该地抽取 20 名市民进行调查,其中有 k 名市民的年龄在 $[30, 50)$ 的概率为 $P(X=k)$ ($k=0, 1, 2, \dots, 20$). 当 $P(X=k)$ 最大时,求 k 的值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=3+t\cos\frac{\pi}{4}, \\ y=2+t\sin\frac{\pi}{4} \end{cases}$ (其中 t 为参数). 以坐标

原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系并取相同的单位长度, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = \frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

(1) 求 C_1 和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 过点 $P(3, 2)$ 作直线 C_1 的垂线交曲线 C_2 于 M, N 两点, 求 $|PM| \cdot |PN|$.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x+1| + |x-1|$.

(1) 解不等式 $f(x) \geq 3$;

(2) 记函数 $f(x)$ 的最小值为 m , 若 a, b, c 均为正实数, 且 $\frac{1}{2}a + b + 2c = m$, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值.