扶沟高中 2019-2020 学年高三测试题（二）

数学（文科）参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	A	C	A	D	B	A	C	D	D

二、填空题

13. $-\frac{1}{2}$　　14. 25　　15. 3x-2y-16=0　　16. $3\sqrt{3}$

三、解答题

17.解：（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{3})$ ....2 分

最大值为$\sqrt{3}$，此时$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in z$ ....4 分

故取得最大值时 x 的集合为$\left\{x\mid x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in z\right\}$ ....6 分

（2）因为$f(B)=\sqrt{3}$ 所以$\sin(B+\frac{\pi}{3})=1$

由$0<B<\pi$ 得$B=\frac{\pi}{6}$ ....8 分

又因为$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

所以$a^2-3a+2=0$ .... 10 分

所以$a=1$或$a=2$ ....12 分

18.解：（1）$\because\ a_{n+1}=3a_n+1$

$\therefore\ a_{n+1}+\frac{1}{2}=3(a_n+\frac{1}{2})$ ....2 分

所以$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是首项为 1 公比为 3 的等比数列.......................................4 分

（2）由（1）可知$a_n+\frac{1}{2}=3^{n-1}$ ....6 分

所以$a_n=3^{n-1}-\frac{1}{2}$

因为$b_{n+1}-b_n=a_n+\frac{1}{2}$所以$b_{n+1}-b_n=3^{n-1}$ ....8 分

$b_2-b_1=3^0$

$b_3-b_2=3^1$

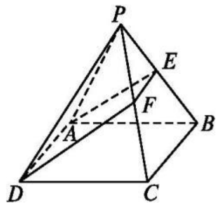
......

$b_n-b_{n-1}=3^{n-2},n\geq 2$

所以 $b_n-1=1+3^1+3^2+...+3^{n-2}$ ....10 分

$b_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$ ....12 分

19.(1)证明 因为 ABCD 为正方形,所以 AD∥BC.



因为 AD⊄ 平面 PBC,BC⊂平面 PBC,

所以 AD∥平面 PBC...2 分

因为 AD⊂平面 AEFD,平面 AEFD∩平面 PBC=EF,

所以 AD∥EF...4 分

(2)证明 因为四边形 ABCD 是正方形,所以 AD⊥AB.

因为平面 PAB⊥平面 ABCD,平面 PAB∩平面 ABCD=AB,AD⊂平面 ABCD,

所以 AD⊥平面 PAB.

因为 PB⊂平面 PAB,所以 AD⊥PB..6 分

因为△PAB 为等边三角形,E 是 PB 中点,所以 PB⊥AE.

因为 AE⊂平面 AEFD,AD⊂平面 AEFD,AE∩AD=A,

所以 PB⊥平面 AEFD...8 分

(3)解：由(1)知,$V_1=V_{C\text{-}AEFD}$,$V_{E\text{-}ABC}=V_{F\text{-}ADC}=\dfrac{2}{3}V_{C\text{-}AEFD}=\dfrac{2}{3}V_1$,................10 分

∴$V_{BC\text{-}AEFD}=\dfrac{5}{3}V_1$,则 $V_{P\text{-}ABCD}=V_1+\dfrac{5}{3}V_1=\dfrac{8}{3}V_1$,

∴$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3}{8}$..12 分

20. 解：（1）由已知，得 $\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-4|}=\dfrac{1}{2}$，将两边平方，并化简得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

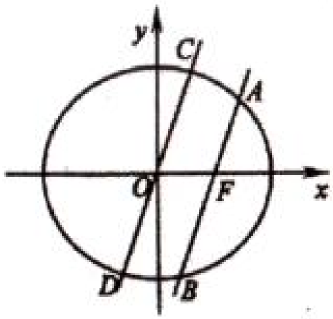
故轨迹 C_1 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.　　　　　　　··················4 分.

（2）证明：（1）当直线 AB 的斜率不存在时，易求 $|AB|=3$，$|CD|=2\sqrt{3}$，

则 $\dfrac{|CD|^2}{|AB|}=4$. ………………6 分.

（2）当直线 AB 的斜率存在时，

设直线 AB 的斜率为 k，依题意 $k\neq 0$，



则直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，直线 CD 的方程为 $y=kx$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 得

$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$， ………………8 分.

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2-4\left(\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}\right)}$

$=\dfrac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$. ………………10 分.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx\end{cases}$ 整理得 $x^2=\dfrac{12}{3+4k^2}$，则 $|x_3-x_4|=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3+4k^2}}$.

$|CD|=\sqrt{1+k^2}\,|x_3-x_4|=4\sqrt{\dfrac{3(1+k^2)}{3+4k^2}}$.

$\therefore \dfrac{|CD|^2}{|AB|}=\dfrac{48(1+k^2)}{3+4k^2}\cdot\dfrac{3+4k^2}{12(1+k^2)}=4$.

综合（1）（2），$\dfrac{|CD|^2}{|AB|}=4$ 为定值. ………………12 分.

21. 解：（1）$f'(x)=-\frac{a}{e^x}-\frac{b}{x}$，所以 $f'(1)=-\frac{a}{e}-b=-(\frac{1}{e}+1)$ ……2 分

当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{e}$，即 $f(1)=\frac{a}{e}=\frac{1}{e}$，解得 $a=b=1$ ……4 分

$f'(x)=-\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x}<0$，函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调减

由于 $f(1)=\frac{1}{e}>0$　$f(e)=\frac{1}{e^e}-1<0$　则函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点．……6 分

（利用趋势或者极限思想说明也可给 7 分，仅说明单调性给 5 分）

（2）一方面，当 $x=1$ 时，$f(1)=\frac{1}{e}<\frac{k}{e}$，由此 $k\geq 2$；

当 $k=2$ 时，下证：$f(x)<\frac{2}{ex}$，在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，

$f(x)<\frac{2}{ex}\Leftrightarrow\frac{1}{e^x}-\ln x<\frac{2}{ex}\Leftrightarrow\frac{x}{e^x}-x\ln x<\frac{2}{e}$ ……8 分

记函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

$g(x)\leq g(1)=\frac{1}{e}$； ……10 分

记函数 $h(x)=x\ln x$，$h'(x)=1+\ln x$，$h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调减，在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调增

$h(x)\geq h(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$，即 $-h(x)\leq-\frac{1}{e}$；

$\frac{x}{e^x}-x\ln x=g(x)+(-h(x))\leq\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}$，成立

又因为 g(x)和 h(x)不能同时在同一处取到最大值，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)<\frac{2}{ex}$ 恒成立

所以最小整数 $k=2$． ……12 分

（此题用其他方法证明也可酌情给分）

22.解：（1）由题意，$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），则 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ \frac{y}{3}=\sin\theta\end{cases}$，平方相加，

即可得 C_1：$x^2+\frac{y^2}{9}=1$， ……2 分

由$\begin{cases} x=-2-\dfrac{1}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数），消去参数，得C_2：$y=-\sqrt{3}\left(x+2\right)$，

即$\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}=0$.　　　……4 分

（2）设$P\left(\cos\alpha, 3\sin\alpha\right)$，

P 到C_2的距离$d=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cos\alpha+3\sin\alpha+2\sqrt{3}\right|}{2}=\dfrac{\left|2\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}\right|}{2}$　……6 分

$\because \alpha\in\left[0,2\pi\right)$，当$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$时，即$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$d_{max}=2\sqrt{3}$，

当$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$时，即$\alpha=\dfrac{4\pi}{3}$，$d_{min}=0$.　　……8 分

$\therefore$取值范围为$\left[0,2\sqrt{3}\right]$.　　　　　……10 分

23.解：（1）当$a=1$时，原不等式可化为$|x-1|x+|x-2|(x-1)<0$；　……2 分

当$x<1$时，原不等式可化为$(1-x)x+(2-x)(x-1)<0$，即$(x-1)^2>0$，显然成立，

此时解集为$(-\infty,1)$；

当$1\le x<2$时，原不等式可化为$(x-1)x+(2-x)(x-1)<0$，解得$x<1$，此时解集为空集；

当$x\ge 2$时，原不等式可化为$(x-1)x+(x-2)(x-1)<0$，即$(x-1)^2<0$，显然不成立；

此时解集为空集；

综上，原不等式的解集为$(-\infty,1)$；　　　……5 分

（2）当$a\ge 1$时，因为$x\in(-\infty,1)$，所以由$f(x)<0$可得$(a-x)x+(2-x)(x-a)<0$，

即$(x-a)(x-1)>0$，显然恒成立；所以$a\ge 1$满足题意；　……7 分

当$a<1$时，$f(x)=\begin{cases} 2(x-a), a\le x<1 \\ 2(x-a)(1-x), x<a \end{cases}$，因为$a\le x<1$时，　$f(x)<0$显然不能成立，

所以$a<1$不满足题意；　　　　　　　……9 分

综上，a 的取值范围是$[1,+\infty)$.　　　　……10 分