

扶沟高中 2019-2020 学年高三测试题（二）

文科数学

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,3,4,6\}$, $B = \{0,1,2,5,7,8\}$, 则 $A \cap (C_U B) = (\quad)$

- A. $\{3,4,6\}$ B. $\{1,3,6\}$ C. $\{3,4,5\}$ D. $\{1,4,6\}$

2. 已知 $a+bi(a,b \in \mathbf{R})$ 是 $\frac{i}{1+i}$ 的共轭复数, 则 $|a+bi| = (\quad)$

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 命题“若 $am^2 < bm^2$, 则 $a < b$ ”的逆命题是真命题
 B. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 > 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x \leq 0$ ”
 C. 命题“ p 且 q ”为假命题, 则命题“ p ”和命题“ q ”均为假命题
 D. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 2$ ”是“ $x > 4$ ”的充分不必要条件

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a>0, b>0)$ 的一个焦点与圆 $(x-5)^2 + y^2 = 25$ 的圆心重合, 且双曲线的离心率等于 $\sqrt{5}$, 则该双曲线的标准方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$ C. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ D. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{25} = 1$

5. 若 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos 2\alpha = (\quad)$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

6. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $a_1 = 2$ 且 a_1, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (\quad)$

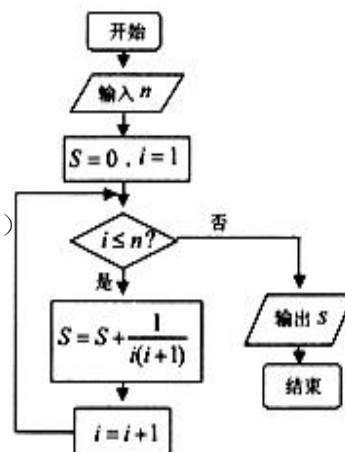
- A. $\frac{n^2}{4} + \frac{7n}{4}$ B. $\frac{n^2}{3} + \frac{5n}{3}$ C. $\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{4}$ D. $n^2 + n$

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的渐近线与椭圆 C 有四个交点, 以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16, 则椭圆 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ B. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$
 C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

8. 执行如图所示的程序框图，若输入 $n=10$ ，则输出的 S 的值是 ()

- A. $\frac{9}{10}$ B. $\frac{10}{11}$
 C. $\frac{11}{12}$ D. $\frac{9}{22}$



9. 已知向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 3)$ 在向量 $\vec{b} = (n, 1)$ 方向上的投影为 3，则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 ()

- A. 30° B. 60° C. 30° 或 150° D. 60° 或 120°

10. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $\cos C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ， $b \cos A + a \cos B = 2$ ，

则 $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 ()

- A. 3π B. 6π C. 9π D. 12π

11. 已知直线 $kx - y + 2k = 0 (k > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 8x$ 相交于 A, B 两点， F 为 C 的焦点，若 $|FA| = 2|FB|$ ，则 $k =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

12. 已知对任意的 $x \in [1, e]$ ，总存在唯一的 $y \in [-1, 1]$ ，使得 $\ln x + y^2 e^y - a = 0$ 成立，其中 e 为自然对数的底数，则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $[1, e]$ B. $(1 + \frac{1}{e}, e + 1)$ C. $(\frac{1}{e}, 1 + e]$ D. $(1 + \frac{1}{e}, e]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的周期为 2 的偶函数，当 $x \in (-2, 0]$ 时， $f(x) = -2^x$ ，则 $f(5) =$ _____.

14. 实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 5 \leq 0 \\ x + y - 4 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x + 2y$ 的最大值是_____.

15. 过点 $A(6, 1)$ 作直线与双曲线 $x^2 - 4y^2 = 16$ 相交于两点 B, C ，且 A 为线段 BC 的中点，则直线的方程（表示为一般式）为_____.

16. 表面积为 20π 的球面上有四点 S, A, B, C 且 $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形，若平面 $SAB \perp$ 平面 ABC ，则三棱锥 $S - ABC$ 体积的最大值是_____.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：(共 60 分)

17. (12 分)

已知函数 $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3}) + 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值并求取得最大值时 x 的集合；

(2) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边长分别为 a 、 b 、 c ，若 $f(B) = \sqrt{3}$ ， $b = 1$ ， $c = \sqrt{3}$ ，求 a 的值。

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$ 且 $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

(1) 证明数列 $\{a_n + \frac{1}{2}\}$ 是等比数列；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$ ， $b_{n+1} - b_n = a_n + \frac{1}{2}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

19. (12 分)

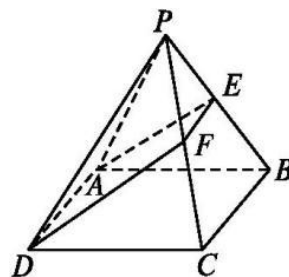
如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\triangle PAB$ 为等边三角形, E 是 PB 中点, 平面 AED 与棱 PC 交于点 F .

(1) 求证: $AD \parallel EF$;

(2) 求证: $PB \perp$ 平面 $AEFD$;

(3) 记四棱锥 $P-AEFD$ 的体积为 V_1 , 四棱锥 $P-ABCD$

的体积为 V_2 , 直接写出 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值.



20. (12 分)

在直角坐标系 xOy 中, 动点 P 与定点 $F(1, 0)$ 的距离和它到定直线 $x=4$ 的距离之比是 $\frac{1}{2}$,

设动点 P 的轨迹为 E 。

(1) 求动点 P 的轨迹 E 的方程;

(2) 设过 F 的直线交轨迹 E 的弦为 AB , 过原点的直线交轨迹 E 的弦为 CD , 若 $AB \parallel CD$,

求证: $\frac{|CD|^2}{|AB|}$ 为定值.

21. (12 分)

设 $f(x) = \frac{a}{e^x} - b \ln x$, 其中 $a, b \in R$, 函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

$$y = -\left(\frac{1}{e} + 1\right)x + \frac{2}{e} + 1, \text{ 其中 } e \approx 2.7182$$

(1) 求 a 和 b 并证明函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点;

(2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) < \frac{k}{ex}$ 恒成立, 求最小的整数 k 的值.

(二)选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题做答, 如果多做. 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases} (\theta \in [0, 2\pi))$, 曲线 C_2 的参数

方程为 $\begin{cases} x = -2 - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}).$

(1) 求曲线 C_1, C_2 的普通方程;

(2) 求曲线 C_1 上一点 P 到曲线 C_2 距离的取值范围.

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

已知 $f(x) = |x - a| + |x - 2| (x - a)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) < 0$ 的解集;

(2) 若 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围.