

# 2019~2020 年上学期高三期末考试

## 数学试题参考答案(理科)

1. B  $A=\{x|x\geq 2 \text{ 或 } x\leq -1\}, B=\{x|x>1\}, \complement_{\mathbb{R}}A=\{x|-1<x<2\}, \text{故 } (\complement_{\mathbb{R}}A)\cap B=\{x|1<x<2\}.$
2. C 因为  $z=\frac{1-3i}{1+i}=-1-2i$ , 所以  $z$  在复平面内对应的点位于第三象限.
3. A  $0<a=(\frac{1}{3})^{\frac{2}{5}}<(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}<(\frac{2}{5})^{\frac{1}{3}}=b, c=\log_3 \frac{2}{5}<0$ , 即  $c<a<b$ .
4. D 用分层抽样的方法抽取了一个容量为  $n$  的样本进行调查, 其中青年人数为 10, 则  $\frac{100}{n}=\frac{4}{2+6+4}$ , 解得  $n=300$ .
5. B  $f(x)$  是奇函数, 排除 C, D;  $f(\pi)=\pi(\ln \pi-\pi^2)<0$ , 排除 A.
6. A 因为  $a_2+a_4=1, a_6+a_8=(a_2+a_4)q^4=9$ , 解得  $q^2=3$ . 因为  $a_2+a_4=a_2(1+q^2)=1$ , 所以  $a_2=\frac{1}{4}$ .
7. D 作出可行域(图略), 由图可得, 当直线  $z=x+y$  经过点  $(-1, 2)$  时取得最小值 1.
8. A  $i$  为鸡的数量,  $j$  为兔的数量,  $m$  为足的数量, 根据题意, 判断框中应填入“ $m=94$ ”.
9. C  $f(x)=\sin \omega x+\sqrt{3} \cos \omega x=2 \sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$ , 因为  $f(x)$  的图象的相邻对称轴间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 故  $f(x)$  的最小正周期为  $T=\pi$ , 所以  $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$ , 于是  $f(x)=2 \sin(2x+\frac{\pi}{3})$ , 所以  $g(x)=2 \sin[2(x+\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{3}]=2 \cos 2x$ , 故  $g(x)$  为偶函数, 并在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上为减函数, 所以 A, D 错误;  $g(\frac{\pi}{4})=0$ , 所以 B 错误; 因为  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ , 所以  $\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3}$ ,  $2 \cos 2x \in [-2, 0]$ , 所以 C 正确.
10. D 由题图可知, 该鲁班锁玩具可以看成是一个棱长为  $2+2\sqrt{2}$  的正方体截去了 8 个正三棱锥所余下来的几何体, 且被截去的正三棱锥的底面边长为 2, 侧棱长为  $\sqrt{2}$ , 则该几何体的表面积为  $S=6 \times [(2+2\sqrt{2})^2-4 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}]+8 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3}=8(6+6\sqrt{2}+\sqrt{3})$ .
11. B 设过  $F_1$  与渐近线  $y=\frac{b}{a}x$  平行的直线  $l$  为  $y=\frac{b}{a}(x+c)$ , 由题知  $F_2$  到直线  $l$  的距离  $d>a$ , 即  $d=\frac{|\frac{bc}{a}+\frac{bc}{a}|}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}}}=2b>a$ , 可得  $\frac{b}{a}>\frac{1}{2}$ , 所以离心率  $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>\frac{\sqrt{5}}{2}$ .
12. C 设曲线  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  的公共点为  $(x_0, y_0)$ ,  
 因为  $f'(x)=\frac{6a^2}{x}, g'(x)=2x-4a$ , 所以  $2x_0-4a=\frac{6a^2}{x_0}$ , 则  $x_0^2-2ax_0-3a^2=0$ ,  
 解得  $x_0=-a$  或  $3a$ , 又  $x_0>0$ , 且  $a>0$ , 则  $x_0=3a$ .  
 因为  $f(x_0)=g(x_0)$ , 所以  $x_0^2-4ax_0-b=6a^2 \ln x_0, b=-3a^2-6a^2 \ln 3a(a>0)$ .  
 设  $h(a)=b$ , 所以  $h'(a)=-12a(1+\ln 3a)$ , 令  $h'(a)=0$ , 得  $a=\frac{1}{3e}$ ,  
 所以当  $0<a<\frac{1}{3e}$  时,  $h'(a)>0$ ; 当  $a>\frac{1}{3e}$  时,  $h'(a)<0$ .  
 所以  $b$  的最大值为  $h(\frac{1}{3e})=\frac{1}{3e^2}$ .
13.  $-56$   $(x^2-\frac{1}{x})^8$  的展开式的通项  $T_{r+1}=C_8^r(x^2)^{8-r}(-\frac{1}{x})^r=C_8^r(-1)^r x^{16-3r}$ , 令  $r=5, T_6=C_8^5(-1)^5 x=-56x$ .

14.2 设  $|n|=x$ , 由  $|m-n|^2=x^2-x+1=3$ , 即  $x^2-x-2=0$ , 解得  $x=2$  或  $x=-1$  (舍去), 故  $|n|=2$ .

15.4  $\because \triangle OFM$  的外接圆与抛物线  $C$  的准线相切,  $\therefore \triangle OFM$  的外接圆的圆心到准线的距离等于圆的半径.

$\because$  圆的面积为  $9\pi$ ,  $\therefore$  圆的半径为 3, 又  $\because$  圆心在  $OF$  的垂直平分线上,  $|OF|=\frac{p}{2}$ ,  $\therefore \frac{p}{2}+\frac{p}{4}=3$ ,  $p=4$ .

16.  $\frac{7}{4}$  设正三棱锥  $P-ABC$  的底面边长为  $2a$ , 高为  $h$ , 则圆柱高为  $\frac{h}{2}$ , 底面圆半径为  $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ , 利用勾股定理, 可求

得圆柱外接球半径  $R=\sqrt{\frac{h^2}{16}+\frac{a^2}{3}}$ . 由  $h=2R$ , 可求得  $h=\frac{4}{3}a$ . 设正三棱锥  $P-ABC$  的外接球的半径为  $r$ , 则

球心到底面距离为  $h-r$ ,  $OA=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$ , 利用勾股定理  $r^2=(h-r)^2+(\frac{2\sqrt{3}a}{3})^2$ , 可得  $r=\frac{7}{6}a$ . 故  $\frac{r}{R}=\frac{7}{4}$ .

17. 解: (1) 由  $(\sin A+\sin B)(a-b)+b\sin C=c\sin C$ ,

可得  $a^2-b^2+bc=c^2$ , ..... 2 分

由余弦定理可得  $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$ , ..... 4 分

故  $A=\frac{\pi}{3}$ . ..... 5 分

(2) 因为  $AD$  为  $\triangle ABC$  的中线, 所以  $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ,

两边同时平方可得  $4\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A$ , ..... 6 分

故  $28=c^2+b^2+bc$ . ..... 7 分

因为  $b=2c$ , 所以  $c=2$ ,  $b=4$ . ..... 8 分

所以  $\triangle ABC$  的面积  $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$ . ..... 10 分

18. (1) 解:  $\frac{1}{2a_1-5}+\frac{2}{2a_2-5}+\frac{3}{2a_3-5}+\cdots+\frac{n}{2a_n-5}=\frac{n}{3}$ , ①

当  $n=1$  时,  $a_1=4$ . ..... 1 分

当  $n\geq 2$  时,  $\frac{1}{2a_1-5}+\frac{2}{2a_2-5}+\frac{3}{2a_3-5}+\cdots+\frac{n-1}{2a_{n-1}-5}=\frac{n-1}{3}$ , ②

由 ①-②, 得  $a_n=\frac{3n+5}{2}$  ( $n\geq 2$ ), ..... 4 分

因为  $a_1=4$  符合上式, 所以  $a_n=\frac{3n+5}{2}$ . ..... 5 分

(2) 证明:  $\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{4}{(3n+5)(3n+8)}=\frac{4}{3}(\frac{1}{3n+5}-\frac{1}{3n+8})$ . ..... 7 分

$T_n=\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_2 a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n a_{n+1}}$

$=\frac{4}{3}\times[(\frac{1}{8}-\frac{1}{11})+(\frac{1}{11}-\frac{1}{14})+\cdots+(\frac{1}{3n+5}-\frac{1}{3n+8})]$

$=\frac{4}{3}\times(\frac{1}{8}-\frac{1}{3n+8})$ , ..... 10 分

因为  $0<\frac{1}{3n+8}\leq\frac{1}{11}$ , 所以  $\frac{1}{22}\leq T_n<\frac{1}{6}$ . ..... 12 分

19. (1) 证明: 取  $AC$  的中点  $O$ , 连接  $PO$ ,  $OB$ .

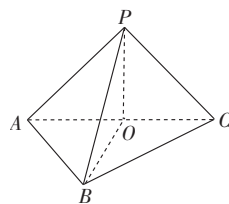
因为  $\triangle ABC$  是正三角形, 所以  $OB\perp AC$ . ..... 1 分

因为  $PA=PC$ , 所以  $PO\perp AC$ .

在  $\triangle POB$  中,  $PO=2$ ,  $OB=2\sqrt{3}$ ,  $PB=4$ , ..... 2 分

所以  $PO^2+OB^2=PB^2$ , 所以  $PO\perp OB$ . ..... 3 分

因为  $OB\cap AC=O$ , 所以  $PO\perp$  平面  $ABC$ , ..... 5 分



又  $PO \subset$  平面  $PAC$ , 所以平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ . ..... 6 分

(2) 解: 以  $O$  为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系  $O-xyz$ ,

可知  $A(0, -2, 0), B(2\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 2), M(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ , ..... 7 分

所以  $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}, 2, 0), \overrightarrow{AM} = (0, \frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ . ..... 8 分

设平面  $ABM$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ , 所以  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = 2\sqrt{3}x + 2y = 0, \\ \overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{n} = \frac{8}{3}y + \frac{4}{3}z = 0, \end{cases}$

令  $x = \sqrt{3}$ , 得  $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, -3, 6)$ . ..... 10 分

取平面  $ABC$  的一个法向量为  $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ ,

记二面角  $M-AB-C$  为  $\theta$ , 由  $\cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ..... 11 分

易知  $\theta$  为锐角, 所以二面角  $M-AB-C$  为  $30^\circ$ . ..... 12 分

20. 解: (1) 依题意,  $(0.05 + a + b + 0.35 + 0.28) \times 1 = 1$ , 故  $a + b = 0.32$ . ..... 1 分

又因为  $a - b = 0.18$ , 所以  $a = 0.25, b = 0.07$ . ..... 3 分

所求平均数为  $9.5 \times 0.05 + 10.5 \times 0.25 + 11.5 \times 0.35 + 12.5 \times 0.28 + 13.5 \times 0.07 = 0.475 + 2.625 + 4.025 + 3.5 + 0.945 = 11.57$  (万分). ..... 5 分

(2) 由题意可知, 手机公司抽取一颗芯片置于一个工程机中进行检测评分达到 11 万分的概率  $P = 0.35 + 0.28 + 0.07 = 0.7$ . ..... 6 分

设每颗芯片的测试费用为  $X$  元, 则  $X$  的可能取值为 600, 900, 1200, 1500,

$P(X=600) = 0.3^2 = 0.09, P(X=900) = 0.7^3 + 0.7 \times 0.3^2 + 0.3 \times 0.7 \times 0.3 = 0.469$ ,

$P(X=1200) = C_3^1 \times 0.3 \times 0.7^2 \times 0.3 = 0.1323, P(X=1500) = C_3^1 \times 0.3 \times 0.7^2 \times 0.7 = 0.3087$ , ..... 9 分

故每颗芯片的测试费用的数学期望为

$E(X) = 600 \times 0.09 + 900 \times 0.469 + 1200 \times 0.1323 + 1500 \times 0.3087 = 1097.91$  (元), ..... 11 分

因为  $100 \times 1097.91 > 100000$ ,

所以显然预算经费不够测试完这 100 颗芯片. ..... 12 分

21. 解: (1) 由已知可得, 椭圆经过点  $(1, \pm\sqrt{2})$ , ..... 1 分

由  $\begin{cases} \frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$  解得  $a=2, b=\sqrt{2}$ , ..... 3 分

故椭圆  $C$  的方程为  $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 1$ . ..... 5 分

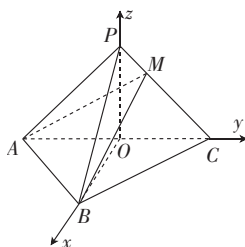
(2) 设直线  $l$  的方程为  $y = \sqrt{2}x + m$ ,  $A, B$  的坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ .

由  $\begin{cases} y = \sqrt{2}x + m, \\ \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 1, \end{cases}$  得  $4x^2 + 2\sqrt{2}mx + m^2 - 4 = 0$ , ..... 7 分

则  $\Delta = 8m^2 - 16(m^2 - 4) = 8(8 - m^2) > 0$ , 所以  $m \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ .

由  $x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}m, x_1 x_2 = \frac{m^2 - 4}{4}$ , ..... 8 分

得  $|AB| = \sqrt{3} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{16 - 2m^2}}{2}$ . ..... 9 分



又点  $M$  到  $AB$  的距离  $d = \frac{|m|}{\sqrt{3}}$ , 所以  $S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{\sqrt{m^2(16-2m^2)}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{m^2(8-m^2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{m^2 + (8-m^2)}{2} = \sqrt{2}$ , ..... 10 分

当且仅当  $m^2 = 8 - m^2$ , 即  $m = \pm 2$  时取等号. .... 11 分

此时直线  $l$  的方程为  $y = \sqrt{2}x \pm 2$ . .... 12 分

22. (1) 解:  $f'(x) = \frac{1}{x} + ax - 2 = \frac{ax^2 - 2x + 1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ . .... 1 分

① 当  $a = 0$  时,  $f'(x) = \frac{-2x+1}{x}$ ,

当  $x \in (0, \frac{1}{2})$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上单调递增;

当  $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上单调递减.

即函数  $f(x)$  只有一个极大值点  $\frac{1}{2}$ , 无极小值点. .... 2 分

② 当  $0 < a < 1$  时,  $\Delta = 4 - 4a > 0$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$ .

当  $x \in (0, \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}) \cup (\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{1-\sqrt{1-a}}{a})$ ,  $(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}, +\infty)$  上单调递增;

当  $x \in (\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{a})$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{a})$  上单调递减.

即函数  $f(x)$  有一个极大值点  $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$ , 有一个极小值点  $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$ . .... 4 分

③ 当  $a \geq 1$  时,  $\Delta = 4 - 4a \leq 0$ , 此时  $f'(x) \geq 0$  恒成立,

即  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 无极值点. .... 5 分

综上所述, 当  $a = 0$  时,  $f(x)$  有且仅有一个极大值点, 即只有 1 个极值点;

当  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  有一个极大值点和一个极小值点, 即有 2 个极值点;

当  $a \geq 1$  时,  $f(x)$  没有极值点. .... 6 分

(2) 证明: 由 (1) 可知, 当且仅当  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1, x_2$  为方程  $ax^2 - 2x + 1 = 0$  的两根, 即  $x_1 + x_2 = \frac{2}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{1}{a}$ , ..... 7 分

所以  $f(x_1) + f(x_2) = \ln x_1 x_2 + \frac{a}{2} (x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1 + x_2) + 3$

$= \ln \frac{1}{a} + \frac{a}{2} (\frac{4}{a^2} - \frac{2}{a}) - \frac{4}{a} + 3 = -\ln a - \frac{2}{a} + 2$ . .... 10 分

令  $g(a) = -\ln a - \frac{2}{a} + 2$ ,  $a \in (0, 1)$ , 则  $g'(a) = -\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} = \frac{2-a}{a^2} > 0$  恒成立, ..... 11 分

所以  $g(a)$  在  $(0, 1)$  上单调递增,

所以  $g(a) < g(1) = -\ln 1 - 2 + 2 = 0$ , 即  $f(x_1) + f(x_2) < 0$ . .... 12 分