赣州市 2019 ~ 2020 学年度第一学期期末考试

高三数学（理科）试卷　　2020 年 1 月

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟

第Ⅰ卷

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $M=\left\{x\left|x^2+x-6>0\right.\right\}$，则 $\complement_{R}M=$

A. $(-3,2)$　　B. $[-3,2]$　　C. $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$

2. 欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$（其中 e 为自然对数的底数，i 为虚数单位）是由瑞士著名数学家欧拉发现的，它将指数函数的定义域扩大到复数，建立了三角函数和指数函数的关系，它在复变函数论里非常重要，被誉为“数学中的天桥”.根据欧拉公式可知，e^{5i} 表示的复数位于复平面中的

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}f(x-3),x\geqslant 0\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1,x<0\end{cases}$，则 $f(2020)=$

A. $\dfrac{5}{4}$　　B. 3　　C. 5　　D. 9

4. 已知 $a=\log_{0.8}0.7,b=\log_{0.7}0.8,c=2.1^{1.1}$，则

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

5. 在 $\triangle ABC$ 的中，D 为 BC 的中点，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{BE}=$

A. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}$　　C. $\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$　　D. $\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

6. 已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与抛物线 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=3\overrightarrow{FQ}$,则 $|QF|$ 的值为

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 2　　D. 3

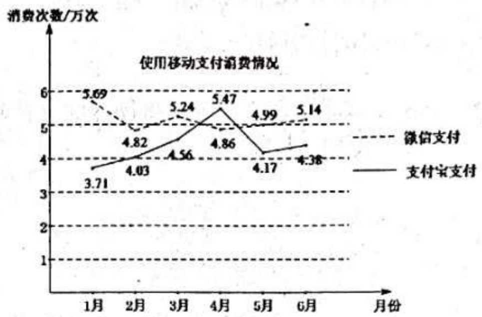
7. 设 $\omega>0$，函数 $y=2\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{7}\right)-1$ 的图像向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位后与原图像重合，则 ω 的最小值为

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 12

8. 若将圆 $x^2+y^2=\pi^2$ 内的正弦曲线 $y=\sin x$ 与 x 轴围成的区域记为 M，则在圆内随机取一点，则该点在 M 内的概率为

A. $\dfrac{2}{\pi^2}$　　B. $\dfrac{4}{\pi^2}$　　C. $\dfrac{2}{\pi^3}$　　D. $\dfrac{4}{\pi^3}$

9. 某超市为了了解“微信支付”与“支付宝支付”的情况(“微信支付”与“支付宝支付”统称为“移动支付”)，对消费者在该超市在2019年1−6月的支付方式进行统计，得到如图所示的折线图，则下列判断正确的是



①这6个月中使用“微信支付”的总次数比使用“支付宝支付”的总次数多

②这6个月中使用“微信支付”的消费总额比使用“支付宝支付”的消费总额大

③这6个月中4月份平均每天使用“移动支付”的次数最多

④2月份平均每天使用“移动支付”比5月份平均每天使用“移动支付”的次数多

A. ①③　　B. ①②③

C. ①③④　　D. ①②③④

10. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=2$，P 是 A_1C_1 的中点，点 Q 在棱 CC_1 上运动，当 $|BQ|+|QA_1|$ 取得最小值时，异面直线 AP 与 BQ 所成角的余弦值为

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

11. 美不胜收的“双勾函数” $y=x+\dfrac{1}{x}$ 是一个对称轴不在坐标轴上的双曲线，它的渐近线分别是 y 轴和直线 $y=x$，则其离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

12. 若函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{x}{e}}, x\geqslant 0 \\ x^2+5x+4, x<0 \end{cases}$（其中e为自然对数的底数），则函数 $h(x)=f(f(x))-f(x)$ 的零点个数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分，第13～21题为必考题，每个试题考生都必须作答，第22～23题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 二项式 $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中常数项为______.

14. 已知实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y-4\geqslant 0 \\ x-y+2\geqslant 0 \\ 2x-y-5\leqslant 0 \end{cases}$，则 $\dfrac{3}{|x+2y-4|}$ 的最大值为______.

15. 过正三角形的外接圆的圆心且平行于一边的直线分正三角形两部分的面积比为 $4:5$，类比此性质：过正四面体的外接球的球心且平行于一个面的平面分正四面体两部分的体积比为______.

16. 在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，满足 $c=3,\cos A=\dfrac{1}{4}$，AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，且 $AD=\sqrt{10}$，则 $b=$______.

三、解答题（共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-\sqrt{a_{n+1}}=a_n+\sqrt{a_n}\,(n\in\mathbf{N}_+)$，且 $a_2=4$，

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

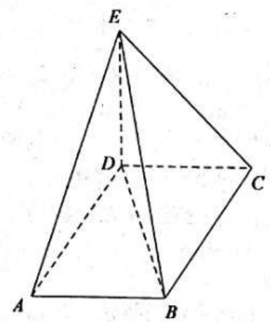
（2）记$b_n=\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{(n+2)^2 a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在平行四边形$ABCD$中，$AB=2$，$AD=4$，$\angle BAD=60^\circ$，平面$EBD\perp$平面ABD，且$EB=CB$，$ED=CD$.

（1）在线段EA上是否存在一点F，使$EC//$平面FBD，证明你的结论；

（2）求二面角$A-EC-D$的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$过点$P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$且离心率为$\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）已知点$Q\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$是椭圆上的点，$A,B$是椭圆上位于直线$PQ$两侧的动点，当$A,B$运动时，满足$\angle APQ=\angle BPQ$,试问直线$AB$的斜率是否为定值？请说明理由.

20.（本小题满分 12 分）

现有一种叫“对对碰”的游戏，游戏规则如下：一轮比赛中，甲乙两人依次轮流抛一枚质地均匀的硬币，甲先抛，每人抛3次，得分规则如下：甲第一次抛得 $x\left(x\in\mathbf{N}_{+}\right)$ 分，再由乙第一次抛，若出现朝上的情况与甲第一次抛的朝上的情况一样，则本次得 2 分，否则得 1 分；再甲第二次抛，若出现朝上的情况与乙第一次抛的朝上的情况一样，则本次得分是乙第一次得分的基础上加 1 分，否则得 1 分；再乙第二次抛，若出现朝上的情况与甲第二次抛的朝上的情况一样，则本次得分是甲第二次得分的基础上加 1 分，否则得 1 分；按此规则，直到游戏结束．记甲乙累计得分分别为 ξ,η．

（1）一轮游戏后，求 $\eta>3$ 的概率；

（2）一轮游戏后，经计算得乙的数学期望 $E\eta=\dfrac{171}{32}$，要使得甲的数学期望 $E\xi>\dfrac{171}{32}$，求 x 的最小值．

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-ax^{2}-x$（e 为自然对数的底数）在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 的切线方程为 $y=\left(\mathrm{e}-3\right)x+b$．

（1）求实数 a,b 的值；

（2）若关于 x 的不等式 $f\left(x\right)>m+\dfrac{4}{5}$ 对于任意 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，求整数 m 的最大值．

请考生在第 22～23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.作答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4−4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=10+2t\\ y=-t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sqrt{\dfrac{3}{3+\sin^{2}\theta}}$．

（1）求曲线 C_1，C_2 的普通方程；

（2）若点 M 与点 P 分别为曲线 C_1，C_2 动点，求 $\left|PM\right|$ 的最小值及此时点 P 的坐标．

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=\left|2x-1\right|+\left|x+1\right|$．

（1）解不等式 $f(x)\geqslant 2$；

（2）记函数 $f(x)$ 的最小值为 m，若 a,b 为正实数，且 $3a+2b=2m$，求 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}$ 的最小值．