复旦大学附属中学 2019 学年第一学期
高二年级数学期末考试参考答案

一. 填空题

1. $\frac{\pi}{3}$　2. 2　3. $-i$　4. 6　5. -2　6. $2\sqrt{7}$　7. $4\sqrt{5}$

8. $4\sqrt{3}$　9. -2　10. $[0,7)$　11. $y^2=2\sqrt{2}x$　12. $18+2\sqrt{17}$

二. 选择题

13. D　14. C　15. B　16. D

三. 解答题

17. 解：（1）由题意，得 $\Delta=4k^2+12k<0$，则 $-3<k<0$ ……………………4 分

$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{-4k^2-12k}i}{2}$，即 $x_{1,2}=-k\pm\sqrt{-k^2-3k}i$ ……………………3 分

（2）因为 x_1,x_2 为一对共轭虚根，所以 $|x_1|=|x_2|$ ……………………2 分

又 $\left|\frac{3i}{1+i}\right|=\frac{|3i|}{|1+i|}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ ……………………2 分

则 $|x_1|=\frac{3}{\sqrt{2}}$，即 $|x_1|=\sqrt{x_1\overline{x_1}}=\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{-3k}=\frac{3}{\sqrt{2}}$，$k=-\frac{3}{2}$ ……………3 分

18. 解：（1）设曲线方程为 $y=ax^2+\frac{64}{7}$，由题意可知，

$0=a\cdot64+\frac{64}{7}$.　$\therefore\ a=-\frac{1}{7}$. ……………………4 分

$\therefore$ 曲线方程为 $y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}$. ……………………2 分

（2）设变轨点为 $C(x,\ y)$，根据题意可知

$$\begin{cases}\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1, & (1)\\ y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}, & (2)\end{cases}$$ 得 $4y^2-7y-36=0$，

$y=4$ 或 $y=-\frac{9}{4}$（不合题意，舍去）. $\therefore\ y=4$. ……………………3 分

得 $x=6$ 或 $x=-6$（不合题意，舍去）. $\therefore$ C 点的坐标为 $(6,\ 4)$ ………2 分

$|AC|=2\sqrt{5}$，$|BC|=4$. ……………………2 分

答：当观测点 A、B 测得 AC、BC 距离分别为 $2\sqrt{5}$、4 时，应向航天器发出变轨指令. ……………………1 分

19. 解：（1）设 $z=a+bi\ (a,b\in R$，且 $b\neq0)$ ……………………1 分

$w=z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}\in R$ ……………………2 分

则 $b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$，因为 $b\neq0$，所以 $a^2+b^2=1$，即 $|z|=1$ ……………………2 分

此时，$w=2a\in(-1,2)$，$a\in(-\frac{1}{2},1)$，即 $\mathrm{Re}z$ 的取值范围是 $(-\frac{1}{2},1)$ …………2 分

（2）$\frac{z^2+z}{z+\bar{z}}=\frac{(a+bi)^2+(a+bi)}{(a+bi)+(a-bi)}=\frac{a^2-b^2+a+(2ab+b)i}{2a}$ 为纯虚数 …………2 分

则 $\begin{cases}a^2-b^2+a=0\\2ab+b\neq0\\a\neq0\end{cases}$ ……………………2 分

又 $a^2+b^2=1$，解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$（舍去） ……………………2 分

故 $z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ……………………1 分

20. 解：（1）由题意，$2a=2\cdot2b$，即 $a=2b$

因为点 $M(\sqrt{3},\frac{1}{2})$ 在椭圆 C 上，所以 $\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$ ……………………2 分

解得 $a=2$，$b=1$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………2 分

（2）根据题意可知，左焦点 $F_1(-\sqrt{3},0)$，且直线的斜率存在.

设 $y=k(x+\sqrt{3})$，联立 $\begin{cases}y=k\left(x+\sqrt{3}\right)\\\frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，整理得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$

$\Delta>0$ 恒成立，设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{12k^2-4}{1+4k^2}$ ……………………3 分

所以 $|EF|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=4\cdot\frac{1+k^2}{1+4k^2}=2$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ………3 分

（3）当直线 l 与 x 轴重合时，可设 $A(2,0)$，则 $B(-2,0)$，

所以 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{3}$，$\frac{d_A}{d_B}=\frac{x_0-2}{x_0+2}$，由 $\frac{d_A}{d_B}=\frac{|PA|}{|PB|}$，得 $\frac{x_0-2}{x_0+2}=\frac{1}{3}$，解得 $x_0=4$.

同理，当 $A(-2,0)$，$B(2,0)$ 时，可得 $x_0=4$. ……………………1 分

当直线 l 不与 x 轴重合时，设直线 l 的方程为 $x=my+1$

$\begin{cases} x=my+1 \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，消去$x$并整理可得$(m^2+4)y^2+2my-3=0$

$\Delta>0$恒成立，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}$ ……………………2 分

因为$\frac{d_A}{d_B}=\frac{|PA|}{|PB|}$，所以$\frac{x_0-x_1}{x_0-x_2}=-\frac{y_1}{y_2}$，即$\frac{x_0-my_1-1}{x_0-my_2-1}=-\frac{y_1}{y_2}$

整理得$x_0=\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}+1=\frac{2m\times(-\frac{3}{m^2+4})}{-\frac{2m}{m^2+4}}+1=4$．

综上，当$\frac{d_A}{d_B}=\frac{|PA|}{|PB|}$时，$x_0=4$． ……………………3 分

另解：（3）当直线l的斜率不存在时，l的方程为$x=1$，此时$d_A=d_B$，$|MA|=|MB|$，

等式$\frac{d_A}{d_B}=\frac{|MA|}{|MB|}$成立； ………………1 分

当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=k(x-1)$，

由$\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得$(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{4k^2+1}$， ………………2 分

由题意，x_1与x_2一个小于1，另一个大于1，不妨设$x_1>1>x_2$，

则$d_A\cdot|MB|-d_B\cdot|MA|=|x_0-x_1|\cdot\sqrt{(x_2-1)^2+y_2^2}-|x_0-x_2|\cdot\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}$

$=|x_0-x_1|\cdot\sqrt{(1+k^2)(x_2-1)^2}-|x_0-x_2|\cdot\sqrt{(1+k^2)(x_1-1)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot[|x_0-x_1|\cdot|x_2-1|-|x_0-x_2|\cdot|x_1-1|]$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot[(x_0-x_1)(1-x_2)-(x_0-x_2)(x_1-1)]$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot[2x_0-(x_0+1)(x_1+x_2)+2x_1x_2]=0$，

所以，$2x_0-(x_0+1)(x_1+x_2)+2x_1x_2=0$，

即$2x_0-\frac{8(x_0+1)k^2}{4k^2+1}+\frac{8(k^2-1)}{4k^2+1}=0$，解得$x_0=4$．

综上，存在满足条件的直线$x=4$，使得$\frac{d_A}{d_B}=\frac{|MA|}{|MB|}$恒成立． …………3 分

21．解：（1）由已知，得$|PF_1|=|PF_2|+2$，即$|PF_1|-|PF_2|=2<|F_1F_2|=4$，

所以，点P的轨迹为以F_1, F_2为焦点的双曲线的右支． ………………2 分

$2a=2$，即$a=1$；$2c=|F_1F_2|=4$，即$c=2$，$b^2=c^2-a^2=3$

$\therefore$曲线C标准方程$x^2-\frac{y^2}{3}=1\ (x>0)\,(x\ge1)$． ………………2 分

（2）设$P(x_0,y_0)$，即有$x_0^2-\frac{y_0^2}{3}=1$，

曲线$3x^2-y^2=0$，即$y=\pm\sqrt{3}x$，设$A(x_1,\sqrt{3}x_1)$，$B(x_2,-\sqrt{3}x_2)$， …………2 分

由P为AB的中点，可得$x_1+x_2=2x_0$，$\sqrt{3}x_1-\sqrt{3}x_2=2y_0$，

解得$x_1=x_0+\frac{1}{\sqrt{3}}y_0$，$x_2=x_0-\frac{1}{\sqrt{3}}y_0$ ………………2 分

则$|OA||OB|=|2x_1||2x_2|=4|x_1x_2|=4(x_0^2-\frac{y_0^2}{3})=4$ ………………2 分

（3）由对称性可知，直线FM必过x轴上的定点．

当直线l_1的斜率不存在时，若$E(2,3)$，$F(2,-3)$，$M(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，则直线$FM$经过点$(1,0)$；

若$F(2,3)$，$E(2,-3)$，$M(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$，则直线$FM$经过点$Q(1,0)$．……2 分

当直线l_1的斜率不存在时，设直线$l_1:y=k(x-2)$，点$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$

直线$DE:y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，则点$M\left(\frac{1}{2},\frac{3y_1}{2(x_1+1)}\right)$ ………………1 分

$\begin{cases} y=k(x-2) \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\ (x>0) \end{cases}$，得$(3-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-3=0$，

$k^2>3$，$x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2+3}{k^2-3}$ ………………1 分

直线FM经过点$Q(1,0)\Leftrightarrow k_{QM}=k_{QF}\Leftrightarrow-\frac{3y_1}{x_1+1}=\frac{y_2}{x_2-1}$

$\Leftrightarrow-3y_1x_2+3y_1=x_1y_2+y_2\Leftrightarrow-3k(x_1-2)x_2+3k(x_1-2)=x_1k(x_2-2)+k(x_2-2)$

$\Leftrightarrow4x_1x_2-5(x_1+x_2)+4=0$

故，直线FM经过定点$Q(1,0)$． ………………4 分