2019～2020 年度高三第四次精英对抗赛
数学参考答案(理科)

1. A 【解析】本题考查集合的交集,考查运算求解能力.
因为 $A=\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{N}\}$,所以 $A\cap B=\{-1,1,3\}$.

2. B 【解析】本题考查复数的运算,考查运算求解能力.
因为 $(2+3\mathrm{i})z=13\mathrm{i}$,所以 $z=\frac{13\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\frac{13\mathrm{i}(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}=3+2\mathrm{i}$.

3. B 【解析】本题考查双曲线,考查运算求解能力.
由题意可得 $\frac{6}{a^2}=2$,即 $a^2=3$,则 $c^2=a^2+b^2=3+6=9$,故该双曲线的离心率 $e=\sqrt{\frac{9}{3}}=\sqrt{3}$.

4. C 【解析】本题考查平面向量,考查运算求解能力.
设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.因为 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\cos\theta\in[-2,2]$,所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=5+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\in[1,9]$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}\in[1,3]$.

5. D 【解析】本题考查数列与数学文化,考查运算求解能力.
设羊户赔粮 a_1,马户赔粮 a_2,牛户赔粮 a_3,则 a_1,a_2,a_3 成等比数列,且公比 $q=2$,$a_1+a_2+a_3=50$,则 $a_1(1+q+q^2)=50$,故 $a_1=\frac{50}{1+2+2^2}=\frac{50}{7}$,$a_2=2a_1=\frac{100}{7}$,$a_3=2^2a_1=\frac{200}{7}$.

6. C 【解析】本题考查平均数和方差的计算,考查数据处理能力和运算求解能力.
因为 88,91,92,94,95 的平均数为 92,所以 $x\geqslant 5$,则 5 个剩余分数为 88,91,92,94,95,
故 5 个剩余分数的方差 $s^2=\frac{1}{5}[(88-92)^2+(91-92)^2+(92-92)^2+(94-92)^2+(95-92)^2]=6$.

7. D 【解析】本题考查三视图,考查空间想象能力与运算求解能力.
由三视图可知该几何体的上半部分是半个圆锥,下半部分是一个底面边长为 4,高为 4 的正三棱柱,则上半部分的半个圆锥的体积 $V_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 4\pi\times 2\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$,下半部分的正三棱柱的体积 $V_2=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}\times 4=16\sqrt{3}$,故该几何体的体积 $V=V_1+V_2=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}+16\sqrt{3}$.

8. A 【解析】本题考查函数的性质,考查运算求解能力与推理论证能力.
由题意可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是增函数,在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.因为 $-2=\log_{0.3}\frac{100}{9}<\log_{0.3}4<\log_{0.3}\frac{10}{3}=-1$,$-1=\log_8 0.125<\log_8 0.2<\log_8 1=0$,$2^{1.1}>2$,所以 $|\log_8 0.2|<|\log_{0.3}4|<|2^{1.1}|$,故 $c<b<a$.

9. C 【解析】本题考查命题,考查运算求解能力与推理论证能力.
因为"$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^2-2x_0+1\leqslant 0$"是真命题,所以其否定是假命题,即①是假命题;在△ABC 中,"$B>30°$"是"$\cos B<\frac{\sqrt{3}}{2}$"的充要条件,即②是真命题;将函数 $y=2\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到函数 $y=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象,即③是假命题.

10. B 【解析】本题考查三角函数的性质,考查运算求解能力与推理论证能力.
因为 $y=\cos x$ 在 $[-\pi,0]$ 上单调递增,所以 $y=\cos\omega x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{\omega},0\right]$ 上单调递增,所以 $f(x)=2\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}\right]$ 上单调递增,则 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\subseteq\left[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}\right]$,解得 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$.

11. C 【解析】本题考查简单几何体的外接球,考查空间想象能力与运算求解能力.

设△ABE 的中心为 O_1,矩形 $BCDE$ 的中心为 O_2,过 O_1 作垂直于平面 ABE 的直线 l_1,过 O_2 作垂直于平面 $BCDE$ 的直线 l_2,则由球的性质可知,直线 l_1 与 l_2 的交点 O 即几何体 $ABCDE$ 外接球的球心.取 BE 的中点 F(图略),连接 O_1F,O_2F,由条件得 $O_1F=O_2F=3$,$\angle O_1FO_2=120°$.连接 OF,因为△OFO_1≌△OFO_2,从而 $OO_1=3\sqrt{3}$.连接 OA,则 OA 为所得几何体外接球的半径,又 $O_1A=6$,则 $OA^2=OO_1^2+O_1A^2=27+36=63$,故所得几何体外接球的表面积等于 252π.

12. A 【解析】本题考查导数与函数的单调性,考查推理论证能力与运算求解能力.
由题意可知 $m>0$,则 $me^{mx}-\ln x>0$ 在 $(0,1]$ 上恒成立.当 $x>1$ 时,$f(x)>0$ 等价于 $me^{mx}>\ln x$,因为 $x>1$,所以 $mxe^{mx}>e^{\ln x}\ln x$.设 $g(x)=xe^x(x>0)$,显然 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,因为 $mx>0$,$\ln x>0$,所以 $g(mx)>g(\ln x)$ 等价于 $mx>\ln x$,即 $m>\frac{\ln x}{x}$.设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$.令 $h'(x)=0$,解得 $x=\mathrm{e}$,则 $h(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增,在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减,从而 $h(x)_{\max}=h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$,故 $m>\frac{1}{\mathrm{e}}$.

13. 3 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的数学思想.
作出可行域(图略),当直线 $z=x+2y$ 经过点 $A(1,1)$ 时,$z_{\max}=1+2\times 1=3$.

14. -2 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查运算求解能力.
$f(x)=x^2+\frac{ax^2}{2^x+1}=x^2(1+\frac{a}{2^x+1})$,记 $g(x)=1+\frac{a}{2^x+1}$,因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $g(x)$ 为奇函数,
则 $g(-x)=-g(x)$,即 $1+\frac{a}{2^{-x}+1}=-(1+\frac{a}{2^x+1})$,整理得 $a+2=0$,解得 $a=-2$.

15. $\frac{8}{5}$ 【解析】本题考查等差数列,考查运算求解能力.
因为 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+5}{n+7}$,所以可设 $S_n=kn(3n+5)$,$T_n=kn(n+7)$,则 $a_5=\frac{S_9}{9}=32k$,$b_7=\frac{T_{13}}{13}=20k$,故 $\frac{a_5}{b_7}=\frac{8}{5}$.

16. 4 【解析】本题考查抛物线的定义的应用,考查推理论证能力.
由题意可知 $|AF|=|AA_1|$,则四边形 AA_1FC 为菱形,从而 AC 平分 $\angle A_1AF$.连接 DF(图略),易证△AFD≌△AA_1D,则 $\angle AFD=\angle AA_1D$.因为 $AA_1\perp l$,所以 $DF\perp AB$,故 $|BF_1|\cdot|DF_1|=|FF_1|^2=4$.

17. 解:(1)因为 $(a-b+c)(\sin A-\sin B-\sin C)=c\sin C-2a\sin B$,所以 $(a-b+c)(a-b-c)=c^2-2ab$,
整理得 $a^2+b^2=2c^2$,即 $c^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$. …………………… 2 分
由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,则 $\cos C=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2}{2ab}\geqslant\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$, …………………… 4 分
因为 $0<C<\pi$,所以 C 的取值范围为 $(0,\frac{\pi}{3}]$. …………………… 5 分
(2)由(1)可得 $b^2=2c^2-a^2$,即 $b=\sqrt{2c^2-a^2}$, …………………… 6 分
则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{c^2}{2a\sqrt{2c^2-a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, …………………… 7 分
整理得 $3c^4=8a^2c^2-4a^4$,即 $(3c^2-2a^2)(c^2-2a^2)=0$, …………………… 8 分
则 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. …………………… 9 分
因为 $b^2=2c^2-a^2>0$,所以 $\frac{c^2}{a^2}>\frac{1}{2}$,则 $\frac{c}{a}$ 的值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $\sqrt{2}$. …………………… 12 分

18. 解:(1)由题意可得被调查者不满意的频率是 $(0.05+0.15)\times 10=\frac{1}{5}$,则满意的频率为 $\frac{4}{5}$, …………… 1 分
用样本的频率代替概率,从该市的全体市民中随机抽取 1 人,
该人满意该方案的概率为 $\frac{4}{5}$. …………………… 2 分

记事件 A 为"抽取的 4 人至少有 3 人满意该方案",则 $P(A)=C_4^4(\frac{4}{5})^4+C_4^3(\frac{4}{5})^3\ \frac{1}{5}=\frac{512}{625}$. ………… 4 分

角度 1:根据题意,60 分或以上被认定为满意,在频率分布直方图中,

评分在[60,100]的频率为 $(0.024+0.032+0.02+0.004)\times10=\frac{4}{5}>0.7$,

故根据相关规则该市应启用该方案. ………… 6 分

角度 2:由平均分为 $45\times0.05+55\times0.15+65\times0.24+75\times0.32+85\times0.2+95\times0.04=70.9>70$,

故根据相关规则该市应启用该方案. ………… 6 分

(2)因为评分在[50,60)与评分在[80,90)的频率之比为 3∶4,所以从评分在[50,60)内的市民中抽取 3 人,评分在[80,90)内的市民中抽取 4 人,则随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,3. ………… 7 分

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$,$P(X=1)=\frac{C_3^2\cdot C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35}$, ………… 8 分

$P(X=2)=\frac{C_3^1\cdot C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$,$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$, ………… 9 分

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

………… 10 分

X 的数学期望 $EX=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$. ………… 12 分

19.(1)证明:因为点 E 为 AD 的中点,$AD=2BC$,所以 $AE=BC$, ………… 1 分

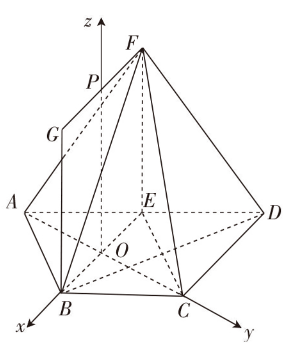
因为 $AD/\!/BC$,所以 $AE/\!/BC$,所以四边形 $ABCE$ 是平行四边形, ………… 2 分

因为 $AB=BC$,所以平行四边形 $ABCE$ 是菱形,所以 $AC\perp BE$. ………… 3 分

因为平面 $BEFG\perp$ 平面 $ABCD$,且平面 $BEFG\cap$ 平面 $ABCD=BE$,所以 $AC\perp$ 平面 $BEFG$, ………… 4 分

因为 $AC\subseteq$ 平面 ACF,所以平面 $ACF\perp$ 平面 $BEFG$. ………… 5 分

(2)解:记 AC,BE 的交点为 O,再取 FG 的中点 P. 由题意可知 AC,BE,OP 两两垂直,故以 O 为坐标原点,以射线 OB,OC,OP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



因为底面 $ABCD$ 是等腰梯形,$AD/\!/BC$,$AD=2AB=2BC=4$,所以四边形 $ABCE$ 是菱形,且 $\angle BAD=60°$,

所以 $A(0,-\sqrt{3},0)$,$B(1,0,0)$,$E(-1,0,0)$,$D(-2,\sqrt{3},0)$,$F(-1,0,2)$, ………… 6 分

则 $\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{BF}=(-2,0,2)$,$\overrightarrow{BD}=(-3,\sqrt{3},0)$. ………… 7 分

设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=x_1+\sqrt{3}y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=-2x_1+2z_1=0,\end{cases}$ 不妨取 $y_1=-1$,则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$. ………… 8 分

设平面 DBF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-3x_2+\sqrt{3}y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=-2x_2+2z_2=0,\end{cases}$ 不妨取 $x_2=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$. ………… 9 分

故 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{105}}{35}$. ………… 11 分

记二面角 $A-BF-D$ 的大小为 θ,故 $\sin\theta=\sqrt{1-\frac{3}{35}}=\frac{4\sqrt{70}}{35}$. ………… 12 分

20.解:(1)由题意可设椭圆的半焦距为 c,

由题意可得 $\begin{cases}b+2=2+\sqrt{2},\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\sqrt{2},\\ b=\sqrt{2}.\end{cases}$ ………… 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ………… 4 分

(2)(ⅰ)当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_0,2)$,

则 $k_{PA}=\frac{2-y_1}{x_0-x_1}$,$k_{PB}=\frac{2-y_2}{x_0-x_2}$,$k_{PQ}=\frac{2}{x_0-2}$. ………… 5 分

联立 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理得 $(4k^2+1)x^2-16k^2x+16k^2-8=0$, ………… 6 分

则 $x_1+x_2=\frac{16k^2}{4k^2+1}$,$x_1\cdot x_2=\frac{16k^2-8}{4k^2+1}$. ………… 7 分

故 $k_{PA}+k_{PB}=\frac{2-y_1}{x_0-x_1}+\frac{2-y_2}{x_0-x_2}=\frac{2+2k-kx_1}{x_0-x_1}+\frac{2+2k-kx_2}{x_0-x_2}=\frac{(4+4k)x_0-(kx_0+2+2k)(x_1+x_2)+2kx_1x_2}{x_0^2-(x_1+x_2)x_0+x_1x_2}$,

整理得 $k_{PA}+k_{PB}=\frac{16(x_0-2)k^2+4(x_0-4)k+4x_0}{4(x_0-2)^2k^2+x_0^2-8}$. ………… 8 分

因为 $k_{PQ}=\frac{2}{x_0-2}$,所以 $\frac{16(x_0-2)k^2+4(x_0-4)k+4x_0}{4(x_0-2)^2k^2+x_0^2-8}=\frac{4}{x_0-2}$,

整理得 $(x_0-4)(x_0-2)k+2(4-x_0)=0$,即 $(x_0-4)[(x_0-2)k-2]=0$,解得 $x_0=4$. ………… 10 分

(ⅱ)当直线 l 的斜率不存在时,经检验 $P(4,2)$ 也满足条件. ………… 11 分

故存在点 $P(4,2)$,使得 $k_{PA}+k_{PB}=2k_{PQ}$. ………… 12 分

21.(1)解:因为 $f(x)=x^2-5x+2\ln x$,所以 $f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}(x>0)$, ………… 1 分

所以当 $x\in(0,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(\frac{1}{2},2)$ 时,$f'(x)<0$, ………… 2 分

则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{2})$ 和 $(2,+\infty)$,单调递减区间为 $(\frac{1}{2},2)$. ………… 3 分

故 $f(x)$ 的极大值为 $f(\frac{1}{2})=-\frac{9}{4}-2\ln 2$;$f(x)$ 的极小值为 $f(2)=-6+2\ln 2$. ………… 5 分

(2)证明:由(1)知 $0<x_1<\frac{1}{2}<x_2<2<x_3$.

设函数 $F(x)=f(x)-f(1-x)$,$x\in(0,\frac{1}{2})$,

$F'(x)=f'(x)+f'(1-x)=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}+\frac{(2x-1)(x+1)}{1-x}=\frac{2(2x-1)^2}{x(1-x)}$,

则 $F'(x)>0$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上恒成立,即 $F(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增, ………… 6 分

故 $F(x)<F(\frac{1}{2})=0$,即 $f(x)<f(1-x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上恒成立.

因为 $x_1\in(0,\frac{1}{2})$,所以 $f(x_2)=f(x_1)<f(1-x_1)$. ………… 7 分

因为 x_2,$1-x_1\in(\frac{1}{2},2)$,且 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},2)$ 上单调递减,

所以 $x_2>1-x_1$，即 $x_1+x_2>1$. ① …………………………………………………………………………… 8 分

设函数 $G(x)=f(x)-f(4-x)$，$x\in(\frac{1}{2},2)$，

$G'(x)=f'(x)+f'(4-x)=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}+\frac{(2x-7)(x-2)}{4-x}=\frac{2(x-2)^2}{x(4-x)}$，

则 $G'(x)>0$ 在$(\frac{1}{2},2)$上恒成立，即 $G(x)$在$(\frac{1}{2},2)$上单调递增，…………………………………… 9 分

故 $G(x)<G(2)=0$，即 $f(x)<f(4-x)$在$(\frac{1}{2},2)$上恒成立.

因为 $x_2\in(\frac{1}{2},2)$，所以 $f(x_3)=f(x_2)<f(4-x_2)$. ……………………………………………………… 10 分

因为 x_3，$4-x_2\in(2,+\infty)$，且 $f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增，

所以 $x_3<4-x_2$，即 $x_2+x_3<4$. ② ………………………………………………………………………… 11 分

结合①②，可得 $x_3-x_1<3$. …………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由题意可得曲线 C 的普通方程为$(x-2)^2+(y+1)^2=9$，……………………………………… 2 分

因为$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$所以 $\rho^2-4\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta=4$，…………………………………………………… 4 分

则曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$. ……………………………………………… 5 分

(2)联立 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\rho^2-4\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$，得 $\rho^2-\sqrt{2}\rho-4=0$. ………………………………… 7 分

设 $M(\rho_1,\frac{\pi}{4})$，$N(\rho_2,\frac{\pi}{4})$，则 $\rho_1+\rho_2=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………… 8 分

故$|OP|=\left|\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)\leqslant 7$ 等价于$\begin{cases}x>2,\\3x+2\leqslant 7\end{cases}$或$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\x+6\leqslant 7\end{cases}$或$\begin{cases}x<-2,\\-3x-2\leqslant 7,\end{cases}$ ………………………………… 2 分

解得$\varnothing$或$-2\leqslant x\leqslant 1$ 或$-3\leqslant x<-2$，…………………………………………………………… 4 分

则不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解集为$[-3,1]$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2) $|x-2|+|2x+4|<2x+a$ 在 $x\in(0,3)$恒成立等价于$|x-2|<a-4$ 在 $x\in(0,3)$恒成立，…… 6 分

即$-a+6<x<a-2$ 在$(0,3)$恒成立，………………………………………………………………………… 7 分

则$\begin{cases}-a+6\leqslant 0,\\a-2\geqslant 3,\end{cases}$即$\begin{cases}a\geqslant 6,\\a\geqslant 5,\end{cases}$解得 $a\geqslant 6$. ………………………………………………………… 9 分

故 a 的取值范围是$[6,+\infty)$. …………………………………………………………………………………… 10 分