

数学（文科）试卷

考生注意：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 2x - 15 \leq 0\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{-3, -1, 1, 3\}$ B. $\{-3, -1, 1\}$
C. $\{-1, 1, 3\}$ D. $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$

2. $2i(1+i) =$

A. $2+2i$ B. $-2+2i$ C. $2-2i$ D. $-2-2i$

3. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的一条渐近线方程是 $y = \sqrt{2}x$, 则该双曲线的离心率是

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

4. 若 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, 且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{3}$, 则向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} 的夹角是

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 若函数 $f(x) = \frac{a}{2^x + 1} + 1$ 为奇函数, 则 $f(a) =$

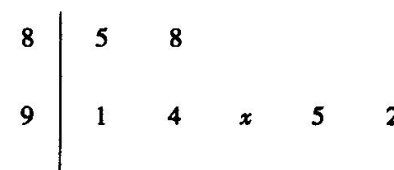
A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

6. 在明代程大位所著的《算法统宗》中有这样一首歌谣，“放牧人粗心大意，三畜偷偷吃苗青。苗主扣住牛马羊，要求赔偿五斗粮，三畜户主愿赔偿，牛马羊吃得异样。马吃了牛的一半，羊吃了马的一半。”请问各畜赔多少？它的大意是放牧人放牧时粗心大意，牛、马、羊偷吃青苗。青苗主人扣住牛、马、羊向其主人要求赔偿五斗粮食（1 斗 = 10 升），三畜的主人同意赔偿，但牛、马、羊吃的青苗量各不相同。马吃的青苗是牛的一半，羊吃的青苗是马的一半。问羊、马、牛的主人应该分别向青苗主人赔偿多少升粮食？

A. $\frac{25}{7}, \frac{50}{7}, \frac{100}{7}$ B. $\frac{25}{14}, \frac{25}{7}, \frac{50}{7}$
C. $\frac{100}{7}, \frac{200}{7}, \frac{400}{7}$ D. $\frac{50}{7}, \frac{100}{7}, \frac{200}{7}$

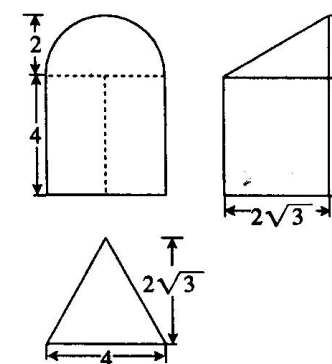
7. 某学校为庆祝元旦，举办了“红歌”合唱比赛，台下共 7 位评委，某班的 7 个得分的茎叶图如下，去掉一个最高分，去掉一个最低分，5 个剩余分数的平均值为 92。后来有 1 个数据模糊，无法辨认，在图中以 x 表示，则这 5 个剩余分数的方差为

A. 4
B. 5
C. 6
D. 7



8. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为

A. $16\sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$
B. $16\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}$
C. $\frac{16\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\pi}{3}$
D. $16\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$



9. 给出下列三个命题：

① “ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 - 2x_0 + 1 \leq 0$ ” 的否定；

② 在 $\triangle ABC$ 中，“ $B > 30^\circ$ ” 是 “ $\cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ” 的充要条件；

③ 将函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图

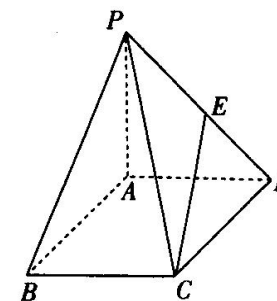
象。

其中假命题的个数是

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. 如图，在底面边长为 4，侧棱长为 6 的正四棱锥 $P-ABCD$ 中， E 为侧棱 PD 的中点，则异面直线 PB 与 CE 所成角的余弦值是

A. $\frac{\sqrt{34}}{17}$ B. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$
C. $\frac{5\sqrt{17}}{17}$ D. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$



11. 已知函数 $f(x) = 2\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围是

- A. $[\frac{2}{3}, 2]$ B. $(0, \frac{2}{3}]$
C. $[\frac{2}{3}, 1]$ D. $(0, 2]$

12. 已知函数 $f(x) = me^x - x^2$ 恰有三个零点, 则 m 的取值范围为

- A. $(\frac{4}{e^2}, +\infty)$ B. $(0, \frac{4}{e^2})$ C. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{e})$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 函数 $f(x) = x \ln x - 2x$ 的极小值是_____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x - y - 2 \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ x + 4y + 4 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + 2y$ 的最大值为_____.

15. 记等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+5}{n+7}$, 则 $\frac{a_5}{b_7} =$ _____.

16. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 顶点为 O , 准线 l 与 y 轴相交于点 F_1 , 过该抛物线上异于顶点 O 的一点 A 作 $AA_1 \perp l$ 交 l 于点 A_1 , 以线段 AF, AA_1 为邻边作平行四边形 A_1AFC , 直线 AC 交 l 于点 D , 延长 AF 交 l 于点 B , 则 $|BF_1| \cdot |DF_1| =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每道试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(a-b+c)(\sin A - \sin B - \sin C) = c \sin C - 2a \sin B$.

(1) 证明: $\cos C = \frac{a^2 + b^2}{4ab}$;

(2) 若 $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\frac{c}{a}$ 的值.

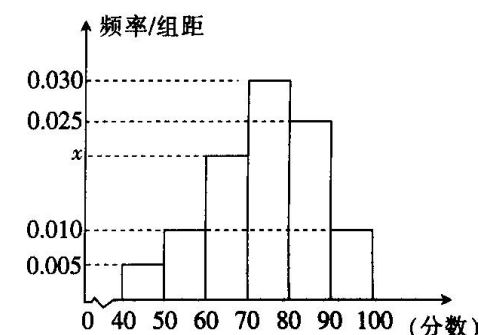
18. (12 分)

某校学生社团组织活动丰富, 学生会为了解同学对社团活动的满意程度, 随机选取了 100 位同学进行问卷调查, 并将问卷中的这 100 人根据其满意度评分值 (百分制) 按照 $[40, 50), [50, 60), [60, 70), \dots, [90, 100]$ 分成 6 组, 制成如图所示的频率分布直方图.

(1) 求图中 x 的值;

(2) 求这组数据的中位数;

(3) 现从被调查的问卷满意度评分值在 $[60, 80)$ 的学生中按分层抽样的方法抽取 5 人进行座谈了解, 再从这 5 人中随机抽取 2 人作主题发言, 求抽取的 2 人恰在同一组的概率.

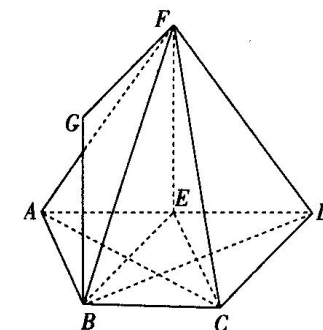


19. (12 分)

如图, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD \parallel BC$, $AD = 2AB = 2BC = 4$, 点 E 为 AD 的中点, 以 BE 为边作正方形 $BEFG$, 且平面 $BEFG \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 证明: 平面 $ACF \perp$ 平面 $BEFG$.

(2) 求点 D 到平面 ACF 的距离.



20. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x-2)e^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $2xf(x) > \ln x - 6x$ 恒成立.

21. (12 分)

已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且椭圆 C 上的点到直线 $y=2$

的最长距离为 $2 + \sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 Q (2, 0) 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 试问在直线 $y=2$ 上是否存在点 P, 使直线 PA 与直线 PB 的斜率之和是直线 PQ 的斜率的 2 倍? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+3\cos\theta, \\ y=-1+3\sin\theta, \end{cases}$ (θ 为参数), 以原点 O 为极点, x 轴的正

半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\rho \in R$), 直线 l 与曲线 C 相

交于 M, N 两点.

(1) 求曲线 C 的极坐标方程;

(2) 记线段 MN 的中点为 P, 求 $|OP|$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x-2| + |2x+4|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 7$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) < 2x+a$ 在 $(0, 3)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.