

文科数学

(考试时间: 120 分钟试卷满分: 150 分)

第 I 卷

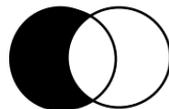
一、选择题(本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若  $z = 4 + 3i$ , 则  $\frac{\bar{z}}{|z|} = ( )$

- A. 1 B. -1 C.  $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$  D.  $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

2. 若集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $B = \{x | x(4-x) < 0\}$ , 则图中阴影部分可表示为( )

- A.  $\{1, 2, 3, 4\}$  B.  $\{1, 2, 3\}$  C.  $\{4, 5\}$  D.  $\{1, 4\}$



3. 设  $\vec{a}, \vec{b}$  是非零向量, “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ” 是  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  的( )

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

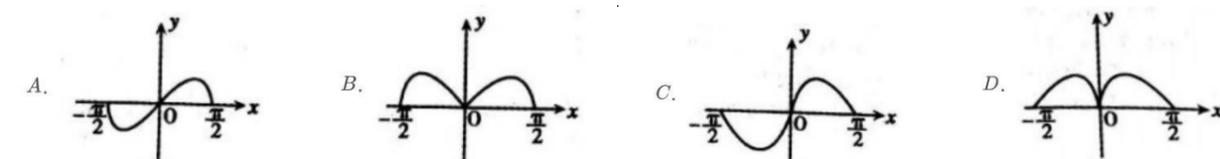
4. 设  $a = \log_4 8$ ,  $b = \log_{0.4} 8$ ,  $c = 2^{0.4}$ , 则

- A.  $b < c < a$  B.  $c < b < a$  C.  $c < a < b$  D.  $b < a < c$

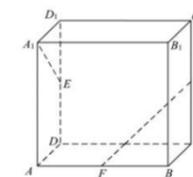
5. 若直线  $2ax - by + 2(a > 0, b > 0)$  被圆  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$  截得弦长为 4, 则  $\frac{4}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值为

- ( ) A. 9 B. 4 C.  $\frac{1}{2}$  D.  $\frac{1}{4}$

6. 函数  $f(x) = x^2 \cdot \cos x$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  的图像大致是( )



7. 如图, 长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = AB = 2, AD = 1$ , 点  $E, F, G$  分别为  $DD_1, AB, CC_1$  的中点, 则异面直线  $A_1E$  与  $GF$  所成角的余弦值是( )



- A.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$  B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  C.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  D. 0

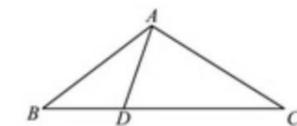
8. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$ , 则  $\triangle ABC$  的形状一定是( )

- A. 正三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

9. 若函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + a \ln x$  有两个不同的极值点, 则实数  $a$  的取值范围为( )

- A.  $a > 1$  B.  $-1 < a < 0$  C.  $a < 1$  D.  $0 < a < 1$

10. 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = 5, AC = 6, \vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{DC}, \vec{AD} \cdot \vec{AC} = 4$ ,



则  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = ( )$

- A. -45 B. 13 C. -13 D. -37

11. 定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足  $f(x-3) = -f(x)$ , 对  $\forall x_1, x_2 \in [0, 3]$  且  $x_1 \neq x_2$ , 都有

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ , 则有( )

- A.  $f(49) < f(64) < f(81)$  B.  $f(49) < f(81) < f(64)$   
C.  $f(64) < f(49) < f(81)$  D.  $f(64) < f(81) < f(49)$

12. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 若满足条件: 存在  $[a, b] \subseteq D$ , 使  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的值域为  $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$ ,

则称  $f(x)$  为“倍缩函数”. 若函数  $f(x) = \ln x + t$  为“倍缩函数”, 则实数  $t$  的取值范围是( )

- A.  $(-\infty, \ln 2 - 1)$  B.  $(-\infty, \ln 2 - 1]$  C.  $(1 - \ln 2, +\infty)$  D.  $[1 - \ln 2, +\infty)$

第 II 卷

二、填空题(每题 5 分, 满分 20 分, 将答案填在答题卡上)

13. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $60^\circ$ , 且  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ , 则  $|\vec{a} + \vec{b}| =$ \_\_\_\_\_.

14. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y - 2 < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 3x - 4y$  的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc$ ,  $\sin C = 2 \cos B$ ,

则 B 的大小为\_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ , 则下列命题正确的是\_\_\_\_\_. (填上你所认为正确的所有命题的序号)

- ① 函数  $f(x)$  ( $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ) 的单调递增区间为  $[0, \frac{\pi}{6}]$ ;
- ② 函数  $f(x)$  的图像关于点  $(-\frac{\pi}{6}, 0)$  对称;
- ③ 函数  $f(x)$  的图像向左平移  $m(m > 0)$  个单位长度后, 所得的图像关于  $y$  轴对称, 则  $m$  的最小值是  $\frac{\pi}{6}$
- ④ 若实数  $m$  使得方程  $f(x) = m$  在  $[0, 2\pi]$  上恰好有三个实数解  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7\pi}{3}$

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

已知  $\vec{m} = (\frac{1}{2} \sin x, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\vec{n} = (\cos x, \cos^2 x - \frac{1}{2})$  ( $x \in R$ ), 且函数  $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$ .

- (1) 求函数  $f(x)$  的对称轴方程;
- (2) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $f(A) = 0, \sin B = \frac{4}{5}, a = \sqrt{3}$ , 求  $b$  的值.

18. (本小题满分 12 分)

某机构为调查我国公民对申办奥运会的态度, 选了某小区的 100 名居民调查结果统计如下:

	支持	不支持	合计
年龄不大于 50 岁	_____	_____	80
年龄大于 50 岁	10	_____	_____
合计	_____	70	100

- (1) 根据已知数据, 把表格数据填写完整;
- (2) 能否在犯错误的概率不超过 5% 的前提下认为不同年龄与支持申办奥运无关?
- (3) 已知在被调查的年龄大于 50 岁的支持者中有 5 名女性, 其中 2 位是女教师, 现从这 5 名

女性中随机抽取 3 人, 求至多有 1 位教师的概率

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d$

$P(K^2 > k)$	0.100	0.050	0.025	0.010
$k$	2.706	3.841	5.024	6.635

19. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系中, 以原点 O 为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线

$L: \rho \cos \theta - \sqrt{3} \rho \sin \theta + 1 = 0$ , 曲线 C 的参数方程为  $\begin{cases} x = 5 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数)

- (1) 求直线 L 和曲线 C 的普通方程
- (2) 在曲线 C 上求一点 Q, 使得 Q 到直线 L 的距离最小, 并求出这个最小值.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = |2x - a| + |2x + 3|$ ,  $g(x) = |x - 1| + 2$

- (1) 解不等式  $|g(x)| < 5$
- (2) 若对任意  $x_1 \in R$ , 都有  $x_2 \in R$ , 使得  $f(x_1) = f(x_2)$  成立, 求实数  $a$  的取值范围

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点分别为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ , 过  $F_1$  的直线  $l$  与椭圆 C 交于  $M, N$  两点, 且  $\triangle MNF_2$  周长为 8.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若直线  $y = kx + m$  与椭圆 C 相交于  $A, B$  两点, 且  $OA \perp OB$ , 试问点 O 到直线 AB 的距离是否为负值, 证明你的结论.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x^2 - (a - 2)x - a \ln x (a \in R)$ .

- (1) 求函数的  $y = f(x)$  单调区间;
- (2) 当  $a = 1$  时, 证明: 对任意的  $x > 0, f(x) + e^x > x^2 + x + 2$