上海市进才中学2020届高三第一次月考

高三年级数学试卷

（时间　120 分钟，满分 150 分）

命题教师　葛鸣　　审题教师　王跃

一、填空题（本大题满分 54 分）本大题共有12题，1-6 题每题4分，7-12 题每题 5 分. 考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得 4 分或 5 分，否则一律得零分。

1. 函数 $y=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$（$\omega>0$）的最小正周期是 π，则 $\omega=$______。

2. 若集合 $A=\{x\,\|x-1|<2\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{x-2}{x+4}<0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$______。

3. 方程 $\lg x+\lg(x+3)=1$ 的解 $x=$______。

4. 已知幂函数 $y=f(x)$ 存在反函数，若其反函数的图像经过点 $\left(\dfrac{1}{3},9\right)$，则该幂函数的解析式 $f(x)=$______。

5. 函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 单位后为奇函数，则 φ 的最小正值为______。

6. 若集合 A、B、C 满足 $A\cup B=B\cap C$，则下列结论：① $A\subseteq C$；② $C\subseteq A$；③ $A\neq C$；④ $A=\varnothing$ 中一定成立的有______。（填写你认为正确的命题序号）

7. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调递增，若关于 x 的不等式 $f(2x-1)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是______。

8. 当 $0\le x\le 1$ 时，如果关于 x 的不等式 $x|x-a|<2$ 恒成立，那么 a 的取值范围是______。

9. 若函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg(x-1)| & x>1\\ \sin x & x<0\end{cases}$，则 $y=f(x)$ 图像上关于原点 O 对称的点共有______对

10. 已知 a,b,c 都是实数，若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le a\\ \dfrac{1}{x}+b & a<x<c\end{cases}$ 的反函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，则 c 的所有取值构成的集合是______。

11. 对于实数 x，定义 $\langle x\rangle$ 为不小于实数 x 的最小整数，如 $\langle 2.8\rangle=3$，$\langle -\sqrt{3}\rangle=-1$，$\langle 4\rangle=4$。若 $x\in R$，则方程 $\langle 3x+1\rangle=2x-\dfrac{1}{2}$ 的根为______。

12. 已知集合 $A=[t,t+1]\cup[t+4,t+9]$，$0\notin A$，存在正数 λ，使得对任意 $a\in A$，都有 $\dfrac{\lambda}{a}\in A$，则 t 的值是______。

二、选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且仅有一个正确。考生应在答题纸的相应编号上，填上正确的答案，选对得 5 分，否则一律得零分。

13. 函数 $f(x)$ 的图像无论经过怎样平移或沿直线翻折，函数 $f(x)$ 的图像都不能与函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图像重合，则函数 $f(x)$ 可以是（　　）

A．$y=(\dfrac{1}{2})^x$　B．$y=\log_2(2x)$　C．$y=\log_2(x+1)$　D．$y=2^{2x-1}$

14. ΔABC 中“$\cos A+\sin A=\cos B+\sin B$”是“其为等腰三角形”的 （　　）

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

15.已知实数 $a>0,b>0$,对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$,有下述命题:

①“$f(x)$ 是奇函数”的充要条件是“函数 $f(x-a)$ 的图像关于点 $A(a,0)$ 对称”;

②“$f(x)$ 是偶函数”的充要条件是“函数 $f(x-a)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称”;

③“$2a$ 是 $f(x)$ 的一个周期”的充要条件是“对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x-a)=-f(x)$ ”;

④“函数 $y=f(x-a)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图像关于 y 轴对称”的充要条件是“$a=b$”

其中正确命题的序号是 （　　）

A. ①②　　　B. ②③　　　C. ①④　　　D. ③④

16. 存在函数 $f(x)$ 满足，对任意 $x\in R$ 都有 （　　）

（A） $f(\sin 2x)=\sin x$　　（B） $f(\sin 2x)=x^2+x$

（C） $f(x^2+1)=|x+1|$　　（D） $f(x^2+2x)=|x+1|$

三、解答题（本大题满分 76 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

17.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分。

已知函数 $f(x)=3x^2-2ax-b$，其中 $a,b\in R$。

（1）若不等式 $f(x)\le 0$ 的解集是 $[0,6]$，求 a 与 b 的值；

（2）若 $b=3a$，求同时满足下列条件的 a 的取值范围。

① 对任意的 $x\in R$ 都有 $f(x)\ge 0$ 恒成立；

② 存在实数 x，使得 $f(x)\le 2-\frac{2}{3}a$ 成立。

18.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分。

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x+b}$ 的图像过点 $(1,2)$，且函数图像又关于原点对称。

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若关于 x 的不等式 $xf(x)>(t-2)x+(t-4)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 t 的取值范围。

19.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分。

已知A、B分别在射线CM、CN（不含端点C）上运动，

$\angle MCN=\dfrac{2}{3}\pi$，在$\Delta ABC$中，角$A$、$B$、$C$所对的边分别

是a,b,c．

（1）若a,b,c依次成等差数列，且公差为2．求c的值；

（2）若$c=\sqrt{3}$，$\angle ABC=\theta$，试用θ表示ΔABC的周长，并求周长的最大值．

20.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分。

已知$f(x)=\dfrac{2x-m}{x^2+1}$定义在实数集R上的函数，把方程$f(x)=\dfrac{1}{x}$称为函数$f(x)$的特征方程，特征方程的两个实根α,β（$\alpha<\beta$）称为$f(x)$的特征根。

（1）讨论函数的奇偶性，并说明理由；

（2）求$f(\beta)-f(\alpha)$的表达式；

（3）把函数$y=f(x)$，$x\in[\alpha,\beta]$的最大值记作$\max f(x)$，最小值记作$\min f(x)$。

令$g(m)=\max f(x)-\min f(x)$，若$g(m)\le\lambda\sqrt{m^2+1}$恒成立，求$\lambda$的取值范围。

21.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分。

设n为正整数，集合$A=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,...,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,...,n\}$。对于集合$A$中的任意元素$\alpha=(x_1,x_2,...,x_n)$和$\beta=(y_1,y_2,...,y_n)$。

记$M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(x_1+y_1-|x_1-y_1|)+(x_2+y_2-|x_2-y_2|)+...+(x_n+y_n-|x_n-y_n|)]$。

（1）当$n=3$时，若$\alpha=(1,1,0)$，$\beta=(0,1,1)$，求$M(\alpha,\alpha)$和$M(\alpha,\beta)$的值；

（2）当$n=4$时，设B是A的子集，且满足：对于B中的任意元素α,β，当α,β相同时，$M(\alpha,\beta)$是奇数；当α,β不同时，$M(\alpha,\beta)$是偶数。求集合B中元素个数的最大值；

（3）给定不小于 2 的n，设B是A的子集，且满足：对于B中的任意两个不同的元素α,β，$M(\alpha,\beta)=0$。写出一个集合B，使其元素个数最多，并说明理由。