

华师一附中朝阳学校 2019-2020 学年度 10 月月考

高三数学

(考试时间: 120 分钟, 满分 150 分)

2019. 10

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 若集合 $A = \{x | x^2 - x < 0\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

- A. $\{x | x \leq 0, \text{ 或 } x \geq 1\}$ B. $\{x | x < 0, \text{ 或 } x > 1\}$ C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | x \geq 1\}$

2. 已知向量 $a = (-1, -2)$, $b = (m^2, 4)$, 那么 “ $a \parallel b$ ” 是 “ $m = \sqrt{2}$ ”

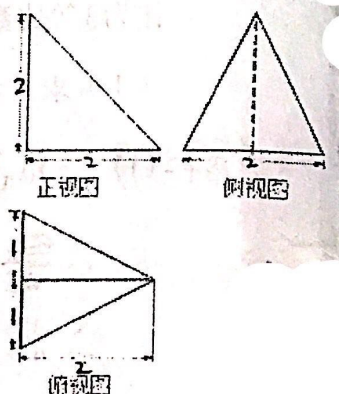
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 m, n 表示两条不同的直线, α 表示平面, 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $m \parallel \alpha$, $n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$ B. 若 $m \parallel \alpha$, $m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$
C. 若 $m \perp \alpha$, $m \perp n$, 则 $n \parallel \alpha$ D. 若 $m \perp \alpha$, $m \parallel n$, 则 $n \perp \alpha$

4. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的全面积是 ()

- A. $4 + 2\sqrt{6}$ B. 8
C. $4 + 2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$



5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, & x > 0, \\ 2^x, & x \leq 0, \end{cases}$ 若 $f(a) > \frac{1}{2}$, 则实数 a 的取值范围

是 ()

- (A) $(-\infty, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ (B) $(-1, \sqrt{3})$
(C) $(-1, 0) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ (D) $(-1, \frac{\sqrt{3}}{3})$

6. 已知 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{AC} 是平面内两个夹角为 60° 的单位向量, 则 $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ 与 \overrightarrow{CA} 的夹角是

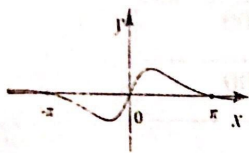
(A) 30°

(B) 60°

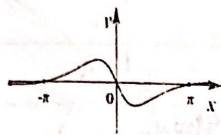
(C) 90°

(D) 120°

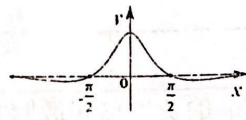
7. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为



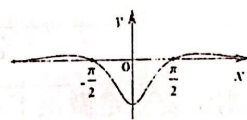
(A)



(B)



(C)



(D)

8. 设连续正整数的集合 $I = \{1, 2, 3, \dots, 238\}$, 若 T 是 I 的子集且满足条件: 当 $x \in T$ 时, $7x \notin T$, 则集合 T 中元素的个数最多是

A. 204

B. 207

C. 208

D. 209

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9. $(x-2)^5$ 的二项展开式中第 4 项的系数是_____

10. 角 α 的顶点在坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边经过点 $P(1, 2)$, 则 $\sin(\pi - \alpha)$ 的值是_____

11. 已知直线 $l_1: ax + (a+2)y + 1 = 0$, $l_2: x + ay + 2 = 0$. 若 $l_1 \perp l_2$, 则实数 a 的值是_____

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_3 = -2$, 前 6 项的和 $S_6 = -3$, 那么数列 $\{n + a_n\}$ 的前 4 项的和是_____

13. 已知 $a > 1$, 且 $a - b = 2$, 那么 $a + \frac{1}{b+1}$ 的最小值是_____

14. 某赛事组委会要为获奖者定做某工艺品作为奖品, 其中一等奖奖品 3 件, 二等奖奖品 6 件. 制作一等奖和二等奖奖品所用原料完全相同, 但工艺不同, 故价格有所差异. 现有

甲、乙两工厂可以制作奖品（一等奖、二等奖奖品均符合要求），甲厂收费便宜，但原料有限，最多只能制作 4 件奖品，乙厂原料充足，但收费较贵，其具体收费情况如下表：

收费(元/件) 工厂	奖品	一等奖奖品	二等奖奖品
甲		500	400
乙		800	600

则组委会定做该工艺品的费用总和最低为 元.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （本题满分 13 分）已知 $\triangle ABC$ 中， $B = \frac{\pi}{3}$ ， $a = \sqrt{2}$

（I）若 $b = \sqrt{3}$ ，求 A ；

（II）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，求 b 的值.

16. (本题满分14分) 已知函数 $f(x) = 4\cos^2 x + 4\sin x \cos x - 3$.

(I) 求 $f(-\frac{\pi}{4})$ 的值, $f(x)$ 的对称轴及单调增区间;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值.

17. (本小题共13分) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 满足 $a_2 = 3$, $a_5 = 6$, 数列 $\{b_n - 2a_n\}$ 是公比为3等比数列, 且 $b_2 - 2a_2 = 9$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

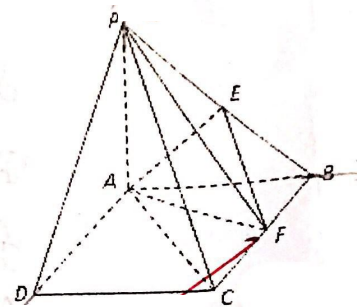
(II) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分14分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, $PA=AB$, 点 E 是 PB 的中点, 点 F 在边 BC 上移动.

(I) 若 F 为 BC 中点, 求证: $EF \parallel$ 平面 PAC ;

(II) 求证: $AE \perp PF$;

(III) 若 $PB = \sqrt{2}AB$, 二面角 $E-AF-B$ 的余弦值等于 $\frac{\sqrt{11}}{11}$, 试判断点 F 在边 BC 上的位置, 并说明理由.



19. (本题满分 13 分) 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间; (II) 若方程 $f(x) = 0$ 没有实数根, 求 a 取值范围

20. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 < x_2 < x_3$.

(I) 当 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ 时, 若方程 $f(x) = mx$ 恰存在两个相等的实数根, 求实数 m 的值;

(II) 求证: 方程 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的实数根;

(III) 若方程 $f'(x) = 0$ 的两个实数根是 α, β ($\alpha < \beta$), 试比较 $\frac{x_1 + x_3}{2}$ 与 α, β 的大小并说明理由.