上海市大同中学高三第一学期10月学情调研

数学试卷

满分150　时间120分钟

一、填空题(本大题共有12题，满分54分)只要求直接填写结果，1-6题每个空格填对得4分，7-12题每个空格填对得5分，否则一律得零分.

1、不等式$\dfrac{x-1}{x-2}\le 0$的解集是_______.

2、2、已知数列$\{a_n\}$为等差数列,若$a_1+a_5+a_9=\pi$,则$\sin(a_2+a_8)=$_______.

3、若$z_1=a+2i, z_2=1-4i$，且$\dfrac{z_1}{z_2}$为纯虚数，则实数$a=$_______.

4、幂函数$y=x^k$的图像经过点$(4,\dfrac{1}{2})$，则它的单调减区间为_______.

5、已知$\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，$\tan(\beta-\dfrac{\pi}{6})=3$，则$\tan(\alpha+\beta)=$_______.

6、设实数x、y满足$|x|+|y|\le 1$，则$2x+y$的最大值为_______.

7、正四面体相邻两侧面所成角的大小为________。

8、从8名女生和4名男生中选出6名学生组成课外活动小组，则按4位女生和2位男生组成课外活动小组的概率为________.

9、已知F是抛物线$y^2=4x$的焦点，M是这抛物线上的一个动点，$P(3,1)$是一个定点，则$|MP|+|MF|$的最小值是________.

10、已知函数$f(x)=2^x+x$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=2^{2019}$，$f(a_{n+1})=f(\dfrac{1}{2}a_n)(n\in N^*)$，则$f(a_{2019})$的值为_______.

11、已知正方形的四个顶点分别为$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$，$C(0,1)$，点D,E分别在线段OC,AB上运动，且$OD=BE$，设AD与OE交于点G，则点G的轨迹方程是_______.

12、平面直角坐标系中，$\vec{e}$ 为单位向里，$\vec{a}$ 向里满足 $\vec{a}\cdot\vec{e}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\lambda$，其中 λ 为正常数. 若

$|\vec{a}|^2\le\lambda|\vec{a}+t\vec{e}|$ 对任意实数 t 成立，则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是_____.

二、选择题(本大题共有 4 题，满分 20 分) 每小题都给出四个选项，其中有且只有一个选项是正确的，选对得 5 分，否则一律得零分.

13、已知 p：$\log_2(x-1)<1$ 的解，q：$x^2-2x-3<0$ 的解，则 p 是 q 的（　　）条件.

A. 充分非必要　B. 必要非充分　C. 充分必要　D. 既非充分又非必要

14、已知 $f(x)=-\sqrt{4-x^2}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=\sqrt{4-x^2}$，则 $f(x)$ 的定义域为（　）

A. $(-2,0)$　　B. $[-2,2]$　　C. $[-2,0]$　　D. $[0,2]$

15、设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x}, & x\le 0\\ f(x-1), & x>0\end{cases}$，方程 $f(x)=x+a$ 有且只有两个不相等实数根，则实数 a 的取值范围为（　）

A. $[3,4)$　　B. $[2,4)$　　C. $(1,4)$　　D. $(-\infty,4)$

16、对于数集 $A=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n,n\ge 2$，定义向里集 $B=\{\vec{a}\,|\,\vec{a}=(s,t),s\in A,t\in A\}$，若对任意 $\vec{a}_1\in B$，存在 $\vec{a}_2\in B$，使得 $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$. 若 $x_n>1$，则（　）

A. $x_1>1$　　B. $x_1=1$　　C. $x_1<1$　　D. $x_1\ne 1$

三、解答题(本大题共有 5 题，满分 76 分) 解答下列各题必须写出必要的步骤.

17、**(本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.**

设 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$，a 为常数.

（1）试判断函数 $y=f(x)-2$ 奇偶性；

（2）若对于任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，求实数 a 的集合.

18、**(本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.**

已知向里 $\vec{a}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$ 和向里 $\vec{b}=(1,f(x))$，且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值；

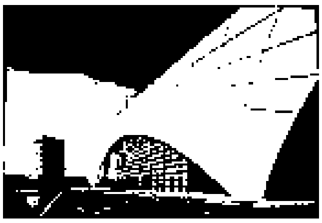
（2）已知△ABC的三个内角分别为 A，B，C，若有 $f(2A-\frac{\pi}{6})=1$，$BC=\sqrt{3}$，求△ABC 面积的最大值.

19、(本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

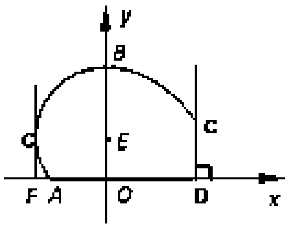
图（1）为东方体育中心，其设计方案侧面的外轮廓线如图（2）所示：曲线 AB 是以点 E 为圆心的圆的一部分，其中 $E(0,t)$. 曲线 BC 是抛物线 $y=-ax^2+30\ (a>0)$ 的一部分；$CD\perp AD$ 且 CD 恰好等于圆 E 的半径，GF 与圆相切且 $GF\perp FD$.

（1）若要求 $CD=20$ 米，$AD=(10\sqrt{3}+30)$ 米，求 t 与 a 值；

（2）当 $0<t\leq 10$ 时，若要求 DF 不超过 45 米，求 a 的取值范围.



图(1)



图（2）

20、(本小题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分

给定椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}\div\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$，称圆心在坐标原点$O$，半径为$\sqrt{a^2\div b^2}$的圆是椭圆$C$的“伴随圆”. 若椭圆$C$右焦点坐标为$F(\sqrt{2},0)$，且过点$(1,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$.

(1)求椭圆C的“伴随圆”方程；

(2)在椭圆C的“伴随圆”上取一点$P(1,\sqrt{3})$，过该点作椭圆的两条切线l_1，l_2，

证明:两切线垂直；

(3)在双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$上找一点Q作椭圆C的两条切线，分别交于切点M、N，使得$\overrightarrow{QM}?\overrightarrow{QN}$　0.求满足条件的所有点Q的坐标.

21、(本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分)

已知$1=a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n$，

定义$M_n=(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}\div\cdots\div a_n^{\ 2})-(a_1a_3\div a_2a_4\div\cdots\div a_{n-2}a_n)$，$n\ge3$

（1）求证：$M_3\ge a_2\div a_3$；

（2）若$\{a_n\}$为等比数列，公比为q，且$T_n=M_3+M_4\div\cdots\div M_n$，求$T_n$；

（3）若$a_{2019}=99$，求M_{2019}的最小值.