第九章　直线与圆

考情探究

1 真题多维细目表

考题	涉分	题型	难度	考点	考向	解题方法	核心素养
2019 课标Ⅱ,12	5	选择题	中	直线、圆的位置关系	圆与圆的位置关系	几何法	数学运算
2018 课标Ⅱ,20	12	解答题	中	直线的方程;圆的方程	①求直线的方程; ②求圆的方程	待定系数法	数学运算
2016 课标Ⅱ,6	5	选择题	易	圆的方程; 直线、圆的位置关系	①圆的一般方程化为标准方程; ②求点到直线的距离	公式法	数学运算
2015 课标Ⅱ,7	5	选择题	中	圆的方程;直线、 圆的位置关系	①三角形的外接圆; ②两点间的距离计算	待定系数法	数学运算、 逻辑推理

2 命题规律与趋势

01 考查内容

本章主要考查直线的斜率、直线和圆的方程、直线与圆的位置关系,弦长和切线方程等.

02 命题特点

一般将直线的斜率、直线方程、圆的方程与圆锥曲线综合考查,有关直线、圆的基本知识虽然难度不大,但它至关重要,是解题的基础和关键.

03 解题方法

公式法、待定系数法、数形结合法和转化法.

04 核心素养

数学运算、直观想象.

05 关联考点

平面向量、方程、不等式、解三角形、圆锥曲线.

06 命题趋势

从近五年考题分析,在这一章考查形式比较稳定,对直线、圆进行单独考查较少,经常将直线与圆锥曲线进行综合考查,以求方程、长度、角度、斜率、最值、变量的取值范围为主.

07 备考建议

1.高考对本章的考查以基本概念和公式为主.复习时要抓住基础,同时需要注意本章内容在圆锥曲线题中的应用.

2.直线与圆的位置关系的考题,难度较大,要加大训练的力度.培养能力,提升素养.

3 最新真题示例

已知⊙C:$x^2+y^2=1$,点$A(0,-2)$,$B(a,2)$,从点A观察点B,要使视线不被⊙C挡住,则实数a的取值范围是　(　　)

A.$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

B.$\left(-\infty,-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

C.$\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

D.$\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

1 核心考点

1.圆的方程、圆的切线方程.

2.直线与圆的位置关系.

2 方法总结

求解直线与圆的位置关系问题,利用数形结合的方法能提高解题效率.

§9.1　直线方程与圆的方程

五年高考 **考点清单**

对应学生用书起始页码 P169

考点一　直线的方程

1.直线的倾斜角和斜率

(1)对于一条与 x 轴相交的直线,如果把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时,所转的最小正角记为 α,那么 α 就叫做直线的倾斜角,规定直线与 x 轴平行或重合时,直线的倾斜角为 0.α 的取值范围为 $[0,\pi)$.

(2)若直线的倾斜角不是 $90°$,则它的倾斜角的正切值叫做这条直线的斜率.直线的斜率常用 k 表示,即 $k=\tan\alpha$,α 为直线的倾斜角,由正切函数的单调性可知倾斜角不同的直线,其斜率也不同.

(3)经过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$ 的直线的斜率公式为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

2.直线方程的五种形式

名称	方程	适用范围
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	不含直线 $x=x_0$
斜截式	$y=kx+b$	不含垂直于 x 轴的直线
两点式	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不含直线 $x=x_1(x_1\neq x_2)$ 和直线 $y=y_1(y_1\neq y_2)$
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不含垂直于坐标轴和过原点的直线($a\neq0,b\neq0$)
一般式	$Ax+By+C=0$	平面直角坐标系内的直线都适用($A^2+B^2\neq0$)

考点二　圆的方程

1.圆的标准方程

(1)方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 表示圆心为 (a,b),半径为 r 的圆的标准方程;

(2)特别地,以原点为圆心,$r(r>0)$ 为半径的圆的标准方程为 $x^2+y^2=r^2$.

2.圆的一般方程

方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 可变形为 $\left(x+\dfrac{D}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{2}\right)^2=\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}$.

(1)当 $D^2+E^2-4F>0$ 时,方程表示以点 $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$ 为圆心,$\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$ 为半径的圆.

(2)当 $D^2+E^2-4F=0$ 时,方程表示一个点 $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$.

(3)当 $D^2+E^2-4F<0$ 时,方程不表示任何图形.

(4)圆的标准方程的优点在于明确地指出了圆心和半径,而一般方程突出了方程形式的特点.

①x^2 和 y^2 的系数相等且不为 0.

②没有 xy 这样的二次项.

(5)$A=C\neq0$ 且 $B=0$ 是二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的必要不充分条件.

五年高考 **题型方法**

对应学生用书起始页码 P169

一、直线方程的求法

1.求直线方程可分为两种类型:一是根据题目条件选择相应的直线方程形式,写出方程,这是直接法;二是根据直线在题目中所具有的某些性质,先设出方程(含参数或待定系数),再确定其中的参数值或待定系数,然后写出方程,这是间接法.

2.求直线方程应注意的问题

(1)选择直线方程时,应注意分类讨论思想的应用:选用点斜式或斜截式时,需讨论直线的斜率是否存在;选用截距式时,需讨论直线是否过原点.

(2)求直线方程时,如果没有特别要求,求出的方程应化为一般式 $Ax+By+C=0(A,B$ 不同时为 0).

例1 根据所给条件求直线的方程:

(1)直线过点$(-4,0)$,倾斜角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$;

(2)直线过点$(-3,4)$,且在两坐标轴上的截距之和为 12;

(3)直线过点$(5,10)$,且原点到该直线的距离为 5.

解析　(1)由题设知,该直线的斜率存在,故可采用点斜式.设倾斜角为 α,则 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}(0\leqslant\alpha<\pi)$.

从而 $\cos\alpha=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$,

则斜率 $k=\tan\alpha=\pm\dfrac{1}{3}$.

故所求直线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{3}(x+4)$,

即 $x+3y+4=0$ 或 $x-3y+4=0$.

(2)由题设知截距不为 0,设直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{12-a}=1$,

又直线过点$(-3,4)$,

所以 $\dfrac{-3}{a}+\dfrac{4}{12-a}=1$,

解得 $a=-4$ 或 $a=9$.

故所求直线方程为 $4x-y+16=0$ 或 $x+3y-9=0$.

(3)当斜率不存在时,直线方程为 $x-5=0$,满足题意.

当斜率存在时,设斜率为 k,则直线方程为 $y-10=k(x-5)$,即 $kx-y+10-5k=0$.

$\therefore \dfrac{|10-5k|}{\sqrt{k^2+1}}=5$,解得 $k=\dfrac{3}{4}$.

$\therefore$ 所求直线方程为 $3x-4y+25=0$.

综上,所求直线方程为 $x-5=0$ 或 $3x-4y+25=0$.

1-1 (2019江西抚州七校联考)过点(2,1)且与直线 $3x-2y=0$ 垂直的直线方程为 ( )

A. $2x-3y-1=0$ B. $2x+3y-7=0$

C. $3x-2y-4=0$ D. $3x+2y-8=0$

答案 B

解析 设要求的直线方程为 $2x+3y+m=0$,

把点(2,1)代入可得 $4+3+m=0$,解得 $m=-7$.

故要求的直线方程为 $2x+3y-7=0$,

故选B.

1-2 (2019四川眉山仁寿一中第一次调研)已知实数 m,n 满足 $2m-n=1$,则直线 $mx-3y+n=0$ 必过定点________.

答案 $\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$

解析 解法一:由 $2m-n=1$,得 $-2m+1+n=0$,即 $m\times(-2)-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)+n=0$,则直线 $mx-3y+n=0$ 必过点 $\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$.

解法二:由已知得 $n=2m-1$,

代入直线 $mx-3y+n=0$ 得 $mx-3y+2m-1=0$,

即 $(x+2)m+(-3y-1)=0$,

由 $\begin{cases}x+2=0,\\-3y-1=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=-\frac{1}{3},\end{cases}$

$\therefore$ 直线必过定点 $\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$.

1-3 (2018北京石油附中期中(节选))已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(0,5)$, $B(1,-2)$, $C(-3,-4)$.求 BC 边的高 AD 所在直线方程.

解析 $\because B(1,-2)$, $C(-3,-4)$,

$\therefore k_{BC}=\frac{-4-(-2)}{-3-1}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$,

$\therefore k_{AD}=-2$,

$\therefore AD$ 所在直线方程为 $y=-2x+5$.

二、圆的方程的求法

求圆的方程一般有两种方法:

(1)几何法,通过研究圆的性质进而求出圆的基本量.确定圆的方程时,常用到的圆的三个性质:①圆心在过切点且垂直于切线的直线上;②圆心在任一弦的中垂线上;③两圆内切或外切时,切点与两圆圆心三点共线.

(2)代数法,即设出圆的方程,用待定系数法求解.

例2 (1)(2019江西名校学术联盟质量检测(二))已知点 $A(-2,-1)$, $B(1,3)$,则以线段 AB 为直径的圆的方程为 ( )

A. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=25$ B. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=25$

C. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{25}{4}$ D. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{25}{4}$

(2)(2018北京石油附中期中(节选))已知 $\triangle ABC$ 三个顶点是 $A(0,5)$, $B(1,-2)$, $C(-3,-4)$,则 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为________________.

(3)(2019湖北1月联考)过点 $A(0,1)$ 和 $B(1,2)$,且与 x 轴相切的圆的方程为________________.

(4)(2018四川峨眉山第七教育发展联盟适应性考试(节选))圆 C 与 x 轴相切于点 $T(2,0)$,与 y 轴正半轴相交于两点 M,N(点 M 在点 N 的下方),且 $|MN|=3$.则圆 C 的方程为________.

解析 (1)圆心为 AB 的中点 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$,半径为 $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2+(1+1)^2}=\frac{5}{2}$,

则以线段 AB 为直径的圆的方程为 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{25}{4}$.故选D.

(2)设 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

将 $A(0,5)$, $B(1,-2)$, $C(-3,-4)$ 代入圆的方程得

$\begin{cases}a^2+(5-b)^2=r^2,\\(1-a)^2+(-2-b)^2=r^2,\\(-3-a)^2+(-4-b)^2=r^2,\end{cases}$

解得 $a=-3$, $b=1$, $r=5$,

故 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为 $(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

(3)设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,因为圆过点 $A(0,1)$, $B(1,2)$,且与 x 轴相切,所以有 $\begin{cases}(0-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\(1-a)^2+(2-b)^2=r^2,\\|b|=r,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}a=1,\\b=1,\\r=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\b=5,\\r=5,\end{cases}$

因此所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x+3)^2+(y-5)^2=25$.

(4)设圆的半径为 r,由题意可知圆心的坐标为 $(2,r)$. $\because MN=3$, $\therefore r^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2=\frac{25}{4}$, $r=\frac{5}{2}$, $\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$.

答案 (1)D (2) $(x+3)^2+(y-1)^2=25$ (3) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x+3)^2+(y-5)^2=25$ (4) $(x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

2-1 (2018河北衡水中学第十六次模拟)若平面内两定点 A,B 间的距离为2,动点 P 与 A、B 距离之比为 $\sqrt{2}$,当 P,A,B 不共线时, $\triangle PAB$ 面积的最大值是 ( )

A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

答案 A

解析 以 AB 所在直线为 x 轴,以线段 AB 的中点为坐标原点建立坐标系,

则 $A(1,0)$, $B(-1,0)$,设 $P(x,y)$,

则 $\sqrt{\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}}=\sqrt{2}$,化简得 $(x+3)^2+y^2=8$,即点 P 在以 $(-3,0)$ 为圆心, $2\sqrt{2}$ 为半径的圆上.当点 P 到直线 AB(x 轴)的距离最大时, $\triangle PAB$ 的面积最大,由圆的性质可得, $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,故选A.

2-2 (2016天津,12,5分)已知圆 C 的圆心在 x 轴的正半轴上,点 $M(0,\sqrt{5})$ 在圆 C 上,且圆心到直线 $2x-y=0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$,则圆 C 的方程为____________.

答案 $(x-2)^2+y^2=9$

解析 设圆 C 的方程为 $(x-a)^2+y^2=r^2(a>0)$,

由题意可得$\begin{cases}\dfrac{|2a|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\\(-a)^2+(\sqrt{5})^2=r^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\r^2=9,\end{cases}$所以圆 C 的方程为$(x-2)^2+y^2=9$.

三、对称问题的处理方法

1.轴对称(即关于直线对称)问题的处理方法

(1)解决点关于直线对称问题要把握两点,点 M 与点 N 关于直线 l 对称,则线段 MN 的中点在直线 l 上,直线 l 与直线 MN 垂直.

设点 $P(x_0,y_0)$关于直线 $y=kx+b$ 的对称点为$P'(x',y')$,则有$\begin{cases}\dfrac{y'-y_0}{x'-x_0}\cdot k=-1,\\\dfrac{y'+y_0}{2}=k\cdot\dfrac{x'+x_0}{2}+b,\end{cases}$可求出 x'、y'.

特殊地,点 $P(x_0,y_0)$关于直线 $x=a$ 的对称点为 $P'(2a-x_0,y_0)$;点 $P(x_0,y_0)$关于直线 $y=b$ 的对称点为 $P'(x_0,2b-y_0)$.

(2)直线关于直线的对称问题

此类问题一般转化为点关于直线的对称问题来解决,有两种情况:一是已知直线与对称轴相交;二是已知直线与对称轴平行.

2.中心对称(即关于点对称)问题的处理方法

(1)设对称中心为 $A(a,b)$,则点 $P(x_0,y_0)$关于 A 的对称点为 $Q(2a-x_0,2b-y_0)$.

(2)直线关于点对称问题的主要解法:在已知直线上取两点,再利用中点坐标公式求出它们关于已知点对称的两点坐标,再由两点式求出直线方程,或者求出一个对称点,再利用两直线平行,斜率相等,由点斜式得到所求的直线方程.

3.图形的对称问题一般转化为点的对称问题处理.也可利用坐标转移法解决问题.

例3 (1)若点(a,b)关于直线 $y=2x$ 的对称点在 x 轴上,则 a,b 满足的条件为　(　　)

A.$4a+3b=0$　　B.$3a+4b=0$

C.$2a+3b=0$　　D.$3a+2b=0$

(2)若点 $A(2,4)$与点 B 关于直线 $l:x-y+3=0$ 对称,则点 B 的坐标为　(　　)

A.$(5,1)$　B.$(1,5)$　C.$(-7,-5)$　D.$(-5,-7)$

(3)直线 l 与 l_1 关于点$(1,-1)$成中心对称,若 l 的方程是 $2x+3y-6=0$,则 l_1 的方程是　(　　)

A.$2x+3y+8=0$　　B.$2x+3y+7=0$

C.$3x-2y-12=0$　　D.$3x-2y+2=0$

解析　(1)设点(a,b)关于直线 $y=2x$ 的对称点为$(t,0)$,则有$\begin{cases}\dfrac{b-0}{a-t}\times 2=-1,\\\dfrac{b+0}{2}=2\times\dfrac{a+t}{2},\end{cases}$

解得 $4a+3b=0$,故选 A.

(2)设 $B(m,n)$,由题意可得$\begin{cases}\dfrac{m+2}{2}-\dfrac{n+4}{2}+3=0,\\\dfrac{n-4}{m-2}=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=1,\\n=5.\end{cases}$故选 B.

(3)设 l_1 上任一点的坐标为(x,y),则它关于点$(1,-1)$的对称点的坐标为$(2-x,-2-y)$,故有 $2(2-x)+3(-2-y)-6=0$,即 $2x+3y+8=0$.

答案　(1)**A**　(2)**B**　(3)**A**

3-1　已知点 $P(t,t)$,$t\in\mathbf{R}$,点 M 是圆 $x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$上的动点,点 N 是圆$(x-2)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$上的动点,则$|PN|-|PM|$的最大值是　(　　)

A.$\sqrt{5}-1$　B.2　C.3　D.$\sqrt{5}$

答案　**B**

解析　设圆 $x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$的圆心为 A,圆$(x-2)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$的圆心为 B,易知 A 的坐标为$(0,1)$,B 的坐标为$(2,0)$,则$|PN|-|PM|\leqslant|PB|+\dfrac{1}{2}-\left(|PA|-\dfrac{1}{2}\right)=|PB|-|PA|+1=|PB|-|PA'|+1\leqslant|A'B|+1=2$,其中 $A'(1,0)$为 A 关于直线 $y=x$ 的对称点,所以选 B.

3-2　(2017 湖南长沙一调)已知入射光线经过点 $M(-3,4)$,被直线 $l:x-y+3=0$ 反射,反射光线经过点 $N(2,6)$,则反射光线所在直线的方程为________.

答案　$6x-y-6=0$

解析　设点 $M(-3,4)$关于直线 $l:x-y+3=0$ 的对称点为 $M'(a,b)$,

所以$\begin{cases}\dfrac{b-4}{a-(-3)}\times 1=-1,\\\dfrac{-3+a}{2}-\dfrac{b+4}{2}+3=0,\end{cases}$解得 $a=1,b=0$.

易知反射光线所在直线过点 M',

又反射光线经过点 $N(2,6)$,

所以所求直线的方程为$\dfrac{y-0}{6-0}=\dfrac{x-1}{2-1}$,即 $6x-y-6=0$.