§9.2　直线、圆的位置关系

五年高考　考点清单

对应学生用书起始页码 P174

考点　直线、圆的位置关系

1.两直线的位置关系

位置关系＼方程	斜截式:$l_1:y=k_1x+b_1$,$l_2:y=k_2x+b_2$	一般式:$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0(A_1^2+B_1^2\neq0)$,$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0(A_2^2+B_2^2\neq0)$
相交	$k_1\neq k_2$	$A_1B_2-A_2B_1\neq0\left(当A_2B_2\neq0时,记为\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\right)$
垂直	$k_1=-\frac{1}{k_2}$或$k_1k_2=-1$	$A_1A_2+B_1B_2=0\left(当B_1B_2\neq0时,记为\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}=-1\right)$
平行	$k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$	$\begin{cases}A_1B_2-A_2B_1=0,\\B_2C_1-B_1C_2\neq0\end{cases}$或$\begin{cases}A_1B_2-A_2B_1=0,\\A_1C_2-A_2C_1\neq0\end{cases}$ $\left(当A_2B_2C_2\neq0时,记为\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}\right)$

2.常见直线系方程

(1)过定点(x_1,y_1)的直线系:$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0\ (A^2+B^2\neq0)$,还可以表示为$y-y_1=k(x-x_1)$和$x=x_1$.

(2)平行于直线$Ax+By+C=0$的直线系:$Ax+By+\lambda=0(\lambda\neq C)$.

(3)垂直于直线$Ax+By+C=0$的直线系:$Bx-Ay+\lambda=0$.

(4)过$A_1x+B_1y+C_1=0$与$A_2x+B_2y+C_2=0$的交点的直线系:$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$(不包括直线$A_2x+B_2y+C_2=0$).

3.常用的距离公式

(1)两点间的距离公式

平面上的两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$间的距离公式:

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

特别地,原点$O(0,0)$与任一点$P(x,y)$的距离$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2)点到直线的距离公式

点$P_0(x_0,y_0)$到直线$l:Ax+By+C=0$的距离$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

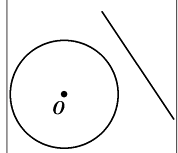
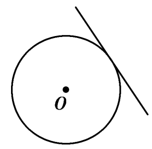
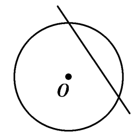
(3)两条平行线间的距离公式

两条平行线$Ax+By+C_1=0$与$Ax+By+C_2=0$间的距离$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

4.直线与圆的位置关系

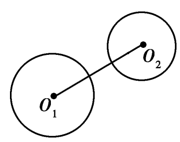
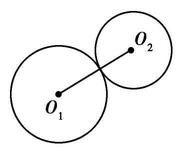
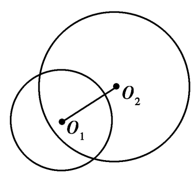
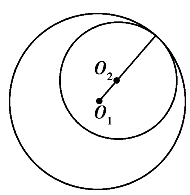
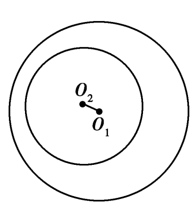
设圆心到直线的距离为d,圆的半径为r.

续表

		相离	相切	相交
图形				
量化	方程观点	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
	几何观点	$d>r$	$d=r$	$d<r$

5.圆与圆的位置关系

$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径分别为r_1、r_2,圆心距$d=|O_1O_2|$.

	图形	量的关系	公切线条数
外离		$d>r_1+r_2$	4
外切		$d=r_1+r_2$	3
相交		$\lvert r_1-r_2\rvert<d<r_1+r_2$	2
内切		$d=\lvert r_1-r_2\rvert$	1
内含		$0\leqslant d<\lvert r_1-r_2\rvert$	0

知识拓展

具有某些共同性质的圆的集合称为圆系,它们的方程叫圆系方程.

常见的圆系方程:

(1)过直线$Ax+By+C=0$与圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$交点的圆系方程:$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0(\lambda\in\mathbf{R})$.

（2）过圆 $C_1:x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和圆 $C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 交点的圆系方程：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0(\lambda\neq-1)$（其中不含圆 C_2，因此注意检验 C_2 是否满足题意，以防丢解）.

五年高考　题型方法

对应学生用书起始页码 P175

一、圆的切线问题的求解方法

1.求过圆上的一点(x_0,y_0)的切线方程

先求切点与圆心连线的斜率 k，由垂直关系知切线斜率为 $-\frac{1}{k}$，由点斜式方程可求得切线方程.若切线斜率不存在，则由图形写出切线方程为 $x=x_0$.

2.求过圆外一点(x_0,y_0)的圆的切线方程

（1）几何法：当切线斜率存在时，设斜率为 k，切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $kx-y+y_0-kx_0=0$.由圆心到直线的距离等于半径，可得出 k 的值，进而求出切线方程.当切线斜率不存在时，切线方程为 $x=x_0$.

（2）代数法：当切线斜率存在时，设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $y=kx-kx_0+y_0$，代入圆的方程，得到一个关于 x 的一元二次方程，由判别式 $\Delta=0$，求得 k，切线方程即可求出.当切线斜率不存在时，切线方程为 $x=x_0$.

3.与圆的切线有关的结论

（1）过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

（2）过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$；

（3）过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作圆的两条切线，切点为 A,B，则过 A、B 两点的直线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

（4）过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 引圆的切线，切点为 T，则切线长为 $|PT|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F}$.

例1（2017 吉林长春模拟）过点(3,1)作圆 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 的切线有且只有一条，则该切线的方程为（　　）

A.$2x+y-5=0$　　B.$2x+y-7=0$

C.$x-2y-5=0$　　D.$x-2y-7=0$

解析　∵过点(3,1)作圆 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 的切线有且只有一条，

∴点(3,1)在圆 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 上，

∵圆心与切点连线的斜率 $k=\frac{1-0}{3-1}=\frac{1}{2}$，

∴切线的斜率为-2，

则圆的切线方程为 $y-1=-2(x-3)$，即 $2x+y-7=0$.故选 B.

答案　B

1-1（2017 福建福州模拟）过点 $P(1,-2)$ 作圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A,B，则 AB 所在直线的方程为（　　）

A.$y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B.$y=-\frac{1}{2}$

C.$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.$y=-\frac{1}{4}$

答案　B

解析　圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为(1,0)，半径为 1，以 $|PC|=\sqrt{(1-1)^2+(-2-0)^2}=2$ 为直径的圆的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$，

将两圆的方程相减得 AB 所在直线的方程为 $2y+1=0$，即 $y=-\frac{1}{2}$.故选 B.

1-2（2017 贵州贵阳一模）由直线 $y=x+1$ 上的一点向圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 引切线，则切线长的最小值为________.

答案　$\sqrt{7}$

解析　设直线上一点为 P，切点为 Q，圆心为 M，则 $|PQ|=\sqrt{|PM|^2-|MQ|^2}=\sqrt{|PM|^2-1}$.

要使 $|PQ|$ 最小，则 $|PM|$ 最小，此题转化为求直线 $y=x+1$ 上的点到圆心 M 的最小距离.

设圆心到直线 $y=x+1$ 的距离为 d，则 $d=\frac{|3-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$.

所以 $|PM|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.所以 $|PQ|=\sqrt{|PM|^2-1}\geq\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{7}$，即切线长的最小值为 $\sqrt{7}$.

二、弦长问题的解法

解决有关弦长问题的两种方法：

（1）几何法：设圆的半径为 r，弦心距为 d，弦长为 l，则 $\left(\frac{l}{2}\right)^2=r^2-d^2$.

（2）代数法：设直线 $y=kx+b$ 与圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ 相交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，列方程组 $\begin{cases}y=kx+b,\\(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,\end{cases}$ 消去 y 后得到一个关于 x 的一元二次方程，从而求得 x_1+x_2,x_1x_2，进而可得弦长 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$（$k$ 为直线的斜率）.

例2（2017 辽宁锦州质量检测（二））直线 $m:kx+y+4=0(k\in\mathbf{R})$ 是圆 $C:x^2+y^2+4x-4y+6=0$ 的一条对称轴，过点 $A(0,k)$ 作斜率为 1 的直线 n，则直线 n 被圆 C 所截得的弦长为（　　）

A.$\sqrt{14}$　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{6}$　　D.$2\sqrt{6}$

解析　圆 $C:x^2+y^2+4x-4y+6=0$ 整理得 $(x+2)^2+(y-2)^2=2$.

因为直线 $m:kx+y+4=0(k\in\mathbf{R})$ 是圆 C 的一条对称轴，所以直线经过圆心(-2,2).

所以 $-2k+2+4=0$，解得 $k=3$.

过点 $A(0,3)$ 作斜率为 1 的直线 $n:y=x+3$.

圆心 C 到直线 n 的距离 $d=\frac{|-2+3-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.圆的半径 $r=\sqrt{2}$.

所以直线 n 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$，故选 C.

答案　C

2-1（2018 湖北荆州中学、宜昌一中等七校联考）若圆 $O_1:x^2+y^2=5$ 与圆 $O_2:(x+m)^2+y^2=20$ 相交于 A,B 两点，且两圆在点 A 处的切线互相垂直，则线段 AB 的长度是（　　）

A.3　　B.4　　C.$2\sqrt{3}$　　D.8

答案　B

解析　易知 $O_1(0,0)$,$O_2(-m,0)$,根据两圆相交得圆心距大于半径之差且小于半径之和,即$\sqrt{5}<|m|<3\sqrt{5}$.再根据题意可得 $O_1A\perp AO_2$,$\therefore m^2=5+20=25$,$\therefore m=\pm5$,根据三角形的面积可得$\frac{|AB|}{2}\times5=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}$,解得$|AB|=4$.故选 B.

2-2　过坐标原点 O 作圆 $x^2+y^2-6x-8y+20=0$ 的两条切线,设切点分别为 P,Q,则线段 PQ 的长度为________.

答案　4

解析　$x^2+y^2-6x-8y+20=0$ 可化为$(x-3)^2+(y-4)^2=5$,

$\therefore$ 圆心为 $C(3,4)$,$|CP|=\sqrt{5}$,圆心 $C(3,4)$到原点的距离为5,故 $\cos\angle OCP=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\therefore \cos\angle PCQ=\cos(2\angle OCP)=2\cos^2\angle OCP-1=-\frac{3}{5}$,$\therefore |PQ|^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2+2\times(\sqrt{5})^2\times\frac{3}{5}=16$,$\therefore |PQ|=4$,即线段$PQ$的长度为 4.

2-3　过点$(3,1)$作圆$(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 的弦,其中最短弦的长为________.

答案　$2\sqrt{2}$

解析　设 $P(3,1)$,圆心 $C(2,2)$,则$|PC|=\sqrt{2}$.易知过$P(3,1)$的最短的弦与 PC 垂直,所以最短弦长为$2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.故答案为 $2\sqrt{2}$.