双十中学2018-2019学年高一第二次月考数学 2018-12-18

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．在答题卷上的相应题目的答题区域内作答．

1．已知$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，并且α是第二象限的角，那么$\tan\alpha$的值等于（　　）

A.$-\frac{4}{3}$　　B.$-\frac{3}{4}$　　C.$\frac{3}{4}$　　D.$\frac{4}{3}$

2．若向量$\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,-1),\vec{c}=(-1,2)$，则$\vec{c}$等于　（　）

A．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$　　C．$\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$　　D．$-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

3．函数$y=\frac{1}{x}\ln[\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}]$的定义域是　（　）

A．$[-4,\ 0)\cup(0,\ 1)$　　B．$[-4,\ 0)\cup(0,\ 1]$

C．$(-4,\ 0)\cup(0,\ 1)$　　D．$(-\infty,-4]\cup[2,\ +\infty)$

4．下列向量组中，可以把向量$\vec{a}=(3,2)$表示出来的是（　）

A．$\vec{e_1}=(0,0),\vec{e_2}=(1,2)$　　B．$\vec{e_1}=(2,-3),\vec{e_2}=(-2,3)$

C．$\vec{e_1}=(3,5),\vec{e_2}=(6,10)$　　D．$\vec{e_1}=(-1,2),\vec{e_2}=(5,-2)$

5．将函数$y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），再将所得的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，得到的图象对应的解析式是（　）

A．$y=\sin\frac{1}{2}x$　　B．$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2})$

C．$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6})$　　D．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

6．已知$125^x=12.5^y=1000$，则$\frac{y-x}{xy}=$　（　）

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D．$\frac{1}{3}$

7．设$a=1.7^{0.3}$，$b=0.9^{3.1}$，$c=0.9^{1.7}$，则a,b,c的大小关系是　（　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

8. 函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ 单调递减，在区间 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 有零点，则 φ 的取值范围是

A. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$　　B. $[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$　　C. $(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$　　D. $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$

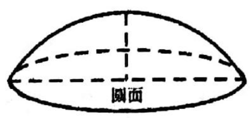
9. 下列各式中可以得到 $m>n$ 的个数为　　(　　)

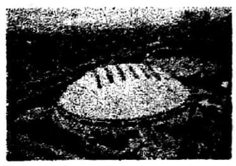
(1) $a^m<a^n$，$0<a<1$；(2) $\log_4 m>\log_4 n$；(3) $\log_{0.3} m>\log_{0.3} n$；(4) $\log_m 5<\log_n 5$；

(5) $m^3>n^3$

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

10.《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表. 其中《方田》章给出计算弧田面积的经验公式为：$S=\frac{1}{2}\times$弦$\times$矢$+\frac{1}{2}\times$矢^2. 弧田（如图 1 阴影部分）由圆弧和其所对弦围成，“弦”指圆弧所对弦长，“矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差. 类比弧田面积公式得到球缺（如图 2）的近似体积公式：$V=\frac{1}{2}\times$圆面积$\times$矢$+\frac{1}{2}\times$矢^3. 球缺是指一个球被平面截下的一部分，厦门嘉庚体育馆近似球缺结构（如图 3），若该体育馆占地面积约为 $18000\,\text{m}^2$，建筑容积约为 $340000\,\text{m}^3$，估计体育馆建筑高度（单位: m）所在区间为





A. $(32,34)$　　B. $(34,36)$　　C. $(36,38)$　　D. $(38,40)$

参考数据：$32^3+18000\times32=608768$，$34^3+18000\times34=651304$，$36^3+18000\times36=694656$，$38^3+18000\times38=738872$，$40^3+18000\times40=784000$.

11. 已知实数 $a.b$ 满足等式 $2015^a=2016^b$，下列五个关系式：①$0<b<a$；②$a<b<0$；③$0<a<b$；④$b<a<0$；⑤$a=b$，其中成立的关系式有　　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

12. 已知函数 $f(x)=e^{x-a}+e^{-x+a}$，若 $3^a=\log_3 b=c$，则

A. $f(a)<f(b)<f(c)$　　B. $f(b)<f(c)<f(a)$

C. $f(a)<f(c)<f(b)$　　D. $f(c)<f(b)<f(a)$

第Ⅱ卷（非选择题 共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在答题卷上的相应题目的答题区域内作答．

13．$\log_3\frac{\sqrt[4]{27}}{3}+\lg 25+\lg 4+7^{\log_7 2}=$ ▲ ．

14．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-5x-6\le 0\}$，$B=[m-3，2m-1]$，若 $A\cap B=B$，则实数 m 的取值范围是 ▲ ．

15．设函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$ 的最小正周期为 π，且其图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，则在下面结论中正确的个数是 ▲ ．

①图象关于点 $(\frac{\pi}{6},0)$ 对称； ②图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称； ③在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上是增函数；

④在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}\right]$ 上是增函数；⑤由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是 π 的整数倍．

16．已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx$（a,b 是常数且 $a\neq 0$）满足条件：$f(2)=0$，且方程 $f(x)=x$ 有两相等实根．存在实数 $m,n(m<n)$ 使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m,n]$ 和 $[2m,2n]$，则 $m+2n=$ ▲ ．

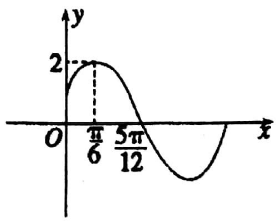
三、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示．

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上的最大值和最小值．



18．（本小题满分 12 分）

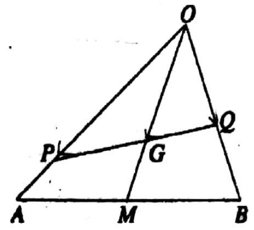
已知 $f(x)=x^2+2x\tan\theta-1$，$x\in[-1，\sqrt{3}]$，其中 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}\right)$．

(1) 当 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最大值；

(2) 求 θ 的取值范围，使 $y=f(x)$ 在区间 $[-1，\sqrt{3}]$ 上是单调函数．

19.（本小题满分 12 分）

如图，G 是 $\triangle OAB$ 的重心，P，Q 分别是边 OA、OB 上的动点，且 P，G，Q 三点共线．



(1) 设 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PQ}$，将 $\overrightarrow{OG}$ 用 λ，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 表示；

(2) 设 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=y\overrightarrow{OB}$，证明：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 是定值．

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$．

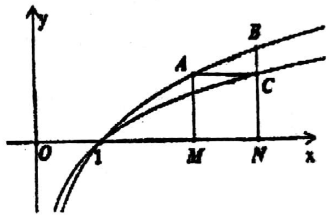
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值及 $f(x)$ 取到最小值时自变量 x 的集合；

(2) 指出函数 $f(x)$ 的图象如何由函数 $y=\sin x$ 的图象经过先平移变换，再伸缩变换得到；

(3) 当 $x\in[0,m]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},2]$，求实数 m 的取值范围．

21.（本小题满分 12 分）

如图，过函数 $f(x)=\log_c x(c>1)$ 的图象上的两点 A,B 作 x 轴的垂线，垂足分别为 $M(a,0),N(b,0)$ $(b>a>1)$，线段 BN 于函数 $g(x)=\log_m x(m>c>1)$ 的图象交于点 C，且 AC 与 x 轴平行．



（1）当 $a=2,b=4,c=3$ 时，求实数 m 的值；

（2）当 $b=a^2$ 时，求 $\dfrac{m}{b}-\dfrac{2c}{a}$ 的最小值；

（3）已知 $h(x)=a^x,\varphi(x)=b^x$，若 x_1,x_2 为区间 (a,b) 任意两个变量，且 $x_1<x_2$，求证：$h(f(x_2))<\varphi(f(x_1))$．

22.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 满足：①对任意实数 m,n 都有 $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)\cdot f(n)$；②对任意 $m\in R$，都有 $f(1+m)=f(1-m)$ 恒成立；③ $f(x)$ 不恒为 0，且当 $0<x<1$ 时，$f(x)<1$．

(1) 求 $f(0)$，$f(1)$ 的值;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并给出你的证明

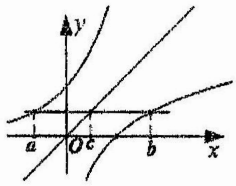
(3) 定义："若存在非零常数 T，使得对函数 $g(x)$ 定义域中的任意一个 x，均有 $g(x+T)=g(x)$，则称 $g(x)$ 为以 T 为周期的周期函数"．试证明：函数 $f(x)$ 为周期函数，并求出 $f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(\frac{3}{3})+\cdots+f(\frac{2017}{3})$ 的值．

双十中学 2018-2019 学年高一第二次月考数学参考答案

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	D	C	D	C	C	B	B	C	C

12.【解析】$\because x\geq 0$ 时 $y'=e^{x}-e^{-x}\geq 0$，所以函数 $y=e^{x}+e^{-x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 为增函数，通过平移可得 $f(x)=e^{x-a}+e^{-x+a}$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 为增函数. 作出 $y=c$ 与 $y=3^{x},y=\log_{3}x,y=x$ 的图象，$\because 3^{a}=\log_{3}b=c$，可得 $a<c<b$，故 $f(a)<f(c)<f(b)$.



二、填空题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\dfrac{15}{4}$；　14. $2\leq m\leq\dfrac{7}{2}$；　15. 2；　16. -2 .

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，或演算步骤）.

17.【解析】（Ⅰ）$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$

（Ⅱ）$\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$，$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$

$\therefore$ 当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 时，$f(x)_{\min}=-2$

$\therefore$ 当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)_{\max}=1$

18.【解析】(1) 当 $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)=x^{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-1=\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2}-\dfrac{4}{3}$，$x\in[-1,\sqrt{3}]$.

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 函数 $f(x)=(x+\tan\theta)^{2}-(1+\tan^{2}\theta)$ 图象的对称轴为 $x=-\tan\theta$，

$\because y=f(x)$ 在 $[-1,\sqrt{3}]$ 上是单调函数，$\therefore -\tan\theta\leqslant -1$ 或 $-\tan\theta\geqslant\sqrt{3}$，

即 $\tan\theta\geqslant 1$ 或 $\tan\theta\leqslant-\sqrt{3}$.

因此，θ 角的取值范围是 $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

19.【解析】(1)解　$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OP}+\lambda\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+\lambda(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})=(1-\lambda)\overrightarrow{OP}+\lambda\overrightarrow{OQ}$.

(2)证明　一方面，由(1)，得

$\overrightarrow{OG}=(1-\lambda)\overrightarrow{OP}+\lambda\overrightarrow{OQ}=(1-\lambda)x\overrightarrow{OA}+\lambda y\overrightarrow{OB}$；①

另一方面，$\because G$ 是 $\triangle OAB$ 的重心，$\therefore\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.②

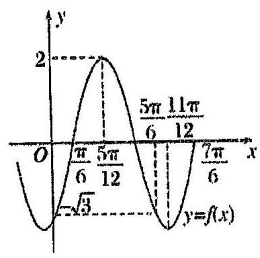
而$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，∴由①②，得$\begin{cases}(1-\lambda)x=\dfrac{1}{3},\\ \lambda y=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=3-3\lambda,\\ \dfrac{1}{y}=3\lambda.\end{cases}$ $\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$(定值)．

20.【解析】(1) $f(x)_{\min}=-2$，此时 $2x-\dfrac{\pi}{3}=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

即 $x=k\pi-\dfrac{\pi}{12}$，$k\in Z$，即此时自变量 x 的集合是$\left\{x\middle| x=k\pi-\dfrac{\pi}{12},\ k\in Z\right\}$.

(2) 把函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象，再把函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象上所有点的纵坐标不变，横坐标变为原来的$\dfrac{1}{2}$，得到函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象，最后再把函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象上所有点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 2 倍，得到函数 $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象.

(3) 如图，因为当 $x\in[0,m]$时，$y=f(x)$取到最大值 2，所以 $m\geqslant\dfrac{5\pi}{12}$.



又函数 $y=f(x)$在$\left[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12}\right]$上是减函数，

故 m 的最大值为$\left[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12}\right]$内使函数值为$-\sqrt{3}$的值，

令 $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，得 $x=\dfrac{5\pi}{6}$，所以 m 的取值范围是$\left[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

21.【解析】

（1）由题意得 $A(2,\log_3 2)$，$B(4,\log_3 4)$，$C(4,\log_m 4)$，

又 AC 与 x 轴平行，所以 $\log_m 4=\log_3 2$，解得 $m=9$.

（2）由题意 $A(a,\log_c a)$，$B(b,\log_c b)$，$C(b,\log_m b)$，

又 AC 与 x 轴平行，所以 $\log_m b=\log_c a$，因为 $b=a^2$，所以 $m=c^2$，

所以 $\dfrac{m}{b}-\dfrac{2c}{a}=\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{2c}{a}=\left(\dfrac{c}{a}-1\right)^2-1$，所以 $\dfrac{c}{a}=1$，$\dfrac{m}{b}-\dfrac{2c}{a}$ 取得最小值 -1.

（3）$h(f(x_2))=a^{\log_c x_2}$，$\varphi(x_1)=b^{\log_c x_1}$，

因为 $a<x_1<x_2<b$，且 $c>1$，所以 $\log_c a<\log_c x_1<\log_c x_2<\log_c b$，

又因为 $a>1,b>1$，所以 $a^{\log_c a}<a^{\log_c x_1}$，$b^{\log_c x_2}<b^{\log_c b}$，

又因为 $\log_c b\cdot\log_c a=\log_c a\cdot\log_c b$，所以 $\log_c a^{\log_c b}=\log_c b^{\log_c a}$，即 $h(f(x_2))<\varphi(f(x_1))$.

22.【解析】（1）由于 $f(x)$ 不恒为 0，故存在 x_0，使 $f(x_0)\neq0$，令 $m=x_0,n=0$，

则 $f(x_0)+f(x_0)=2f(x_0)f(0)$，所以 $f(0)=1$，

令 $m=n=1\Rightarrow f(2)+f(0)=2f^2(1)$，

由 $f(1+m)=f(1-m)$ 并令 $m=1$ 得：$f(2)=f(0)$，结合以上结果可得 $f^2(1)=1$

又令 $m=n=\dfrac{1}{2}$，$f(1)+f(0)=2f(\dfrac{1}{2})\cdot f(\dfrac{1}{2})<2$ （因为 $f(\dfrac{1}{2})<1$）

所以，$f(1)<1$，故 $f(1)=-1$；

（2）令 $m=0,n=x$，得：$f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$，以及有 $f(0)=1$

即有 $f(-x)=f(x)$，即有 $f(x)$ 为偶函数；

（3）由 $f(1+m)=f(1-m)$ 并取 $1+m=-x$ 得 $f(-x)=f(2+x)$，又 $f(x)$ 为偶函数，

则 $f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数；

令 $m=n=\dfrac{1}{3}\Rightarrow f(\dfrac{2}{3})+f(0)=2f^2(\dfrac{1}{3})\Rightarrow f(\dfrac{2}{3})+1=2f^2(\dfrac{1}{3})$，

再令 $m=\dfrac{2}{3},n=\dfrac{1}{3}\Rightarrow f(1)+f(\dfrac{1}{3})=2f(\dfrac{2}{3})f(\dfrac{1}{3})\Rightarrow -1+f(\dfrac{1}{3})=2f(\dfrac{2}{3})f(\dfrac{1}{3})$.

而 $f(\dfrac{2}{3})<1$，解得，$f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{2},f(\dfrac{2}{3})=-\dfrac{1}{2}$，

由 $f(1+m)=f(1-m)$ 得，$f(\dfrac{1}{3})=f(\dfrac{5}{3})$，$f(\dfrac{2}{3})=f(\dfrac{4}{3})$，所以

$$f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(\frac{3}{3})+f(\frac{4}{3})+f(\frac{5}{3})+f(\frac{6}{3})=0$$

又由于 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，

$$f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(\frac{3}{3})+\cdots+f(\frac{2017}{3})=336\times0+f(\frac{2017}{3})=f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$$