

永安一中 2018—2019 学年第一学期第一次月考

高三文科数学

命题人：宋建华 审题人：易银娟

（考试时间：120 分钟 总分：150 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 \leq 1\}$ ， $B = \{x | \log_2 x \leq 1\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $(1, 2]$ B. $(0, 1]$ C. $[-1, 1]$ D. $(0, 2]$

2. 欧拉，瑞士数学家，18 世纪数学界最杰出的人物之一，是有史以来最多遗产的数学家，数学史上称十八世纪为“欧拉时代”。1735 年，他提出了欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \text{ 被后人称为“最引人注目的数学公式”。若 } \theta = \frac{2\pi}{3}, \text{ 则复数 } z = e^{i\theta}$$

对应复平面内的点所在的象限为

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知 P ：函数 $f(x) = (a-1)^x$ 为增函数， $q: \forall x \in [\frac{1}{2}, 1], ax-1 \leq 0$ ，则 p 是 $\neg q$ 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要

4. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_9 = 54$ ，则 $a_1 + a_5 + a_9 =$

- A. 9 B. 15 C. 18 D. 36

5. 若 $a = (\frac{7}{9})^{-\frac{1}{4}}$ ， $b = (\frac{9}{7})^{\frac{1}{5}}$ ， $c = \log_2 \frac{7}{9}$ ，则 a, b, c 的大小关系是

- A. $b < a < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

6. 已知 $\vec{a} = (3, -1)$ ， $\vec{b} = (1, -2)$ ，则 \vec{a} ， \vec{b} 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

7. 已知实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = x + 4y$ 的最大值是

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

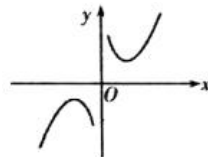
8. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $a + b = 2c$ ， $3\sin C = 5\sin B$ ，则角

$A =$

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

9. 已知某个函数的部分图象如图所示，则这个函数解析式可能为

- A. $y = x + \frac{\cos x}{x}$ B. $y = x^2 + \frac{\sin x}{x}$
C. $y = x - \frac{\cos x}{x}$ D. $y = x - \frac{\sin x}{x}$



10. 若将函数 $y = \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后与函数 $y = \sin \omega x$ 的图象重合，则 ω 的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，则

- A. $f(x)$ 在 $x = e$ 处取得最小值 $\frac{1}{e}$ B. $f(x)$ 有两个零点
C. $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称 D. $f(4) < f(\pi) < f(3)$

12. 设 $f'(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的导数， $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x) = 0$ 有实数解 x_0 ，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $y = f(x)$ 的“拐点”. 已知：任何三次函数既有拐点，

又有对称中心，且拐点就是对称中心. 设 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1$ ，数列 $\{a_n\}$ 的通

项公式为 $a_n = 2n - 7$ ，则 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_8) =$

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知非零向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 60° ，且 $|\vec{b}| = 1, |2\vec{a} - \vec{b}| = 1$ ，则 $|\vec{a}| =$ ☆ ☆.

14. 在平面直角坐标系中，角 α 终边过点 $P(2, 1)$ ，则 $\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha$ 的值为 ☆ ☆.

15. 若函数 $f(x) = m^{x-1} + 1$ (其中 $m > 0$, 且 $m \neq 1$) 恒过定点 A, 而点 A 恰好在直线

$2ax + by - 2 = 0$ 上 (其中 $a > 0, b > 0$) 则式子 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 ☆ ☆.

16. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+1), & x \in [0, 1) \\ 1 - |x-3|, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$, 则方程 $f(x) = \frac{1}{2}$

的所有解之和为 ☆ ☆.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_n = 2^{n+1} - n - 2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2(a_n + 1)$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(a+2c)\cos B + b\cos A = 0$,

$b = 5$.

(I) 求角 B ;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1 (x \in R)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值;

(II) 若 $f(x_0) = \frac{6}{5}, x_0 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $\cos 2x_0$ 的值.

20. (12 分)

某市为提高城市品味, 计划对市内现有全部出租车进行更新换代, 在引进新车型的同时淘汰等量的旧车型. 现决定 2019 年 1 月份更新 a 辆, 以后每个月更新的车辆数比前一个月多 a 辆, 两年时间更新完毕.

(I) 问该市的出租车共有多少辆?

(II) 若从第二个月起, 每个月以 10% 的增长速度进行更新, 至少需要多少个月才能更新完毕?

(参考数据: $1.1^{35} \approx 28.10$, $1.1^{36} \approx 30.91$, $1.1^{37} \approx 34.00$, $1.1^{38} \approx 37.40$)

21. (12 分)

函数 $f(x) = (ax+1)e^{-x} (a \in R)$.

(I) 当 $a > 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 对任意 $x \in [0, +\infty)$, $f(x) \leq x+1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 本题满分 10 分. 请考生在 (22)、(23) 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

以直角坐标系的原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 且两个坐标系取相等的长度单位建立坐标系. 已知直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta = 3$, 曲线 C 的参数

方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 3\sin\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}).$

(I) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(II) $P(1,1)$, 设直线 l 与曲线 C 相交于 A 、 B 两点, 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x+1|$.

(I) 解关于 x 的不等式 $f(x) - x^2 + 1 > 0$;

(II) 若函数 $g(x) = f(x-1) + f(x+m)$, 当且仅当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $g(x)$ 取得最小值,

求 $x \in (-1, 2)$ 时, 函数 $g(x)$ 的值域.