

湖南省地质中学 2019 届高三月考试卷（三）

数 学（理科）

湖南省地质中学高三数学备课组组稿

本试卷分试题卷、答题卡两部分，考生需将答案写在答题卡上，考试结束好只交答题卡，试题卷自己保存。时量 120 分钟，满分 150 分。

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{x | x^2 < 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 4\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2, 4\}$

2. 已知复数 $z = \frac{1-i}{2+i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $|z| =$

- A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

3. 已知函数 $f(x) = x + \sin x + 1$, 若 $f(a) = -3$, 则 $f(-a)$ 的值为

- A. 0 B. 3 C. 4 D. 5

4. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的焦点到渐近线的距离为

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. 3

5. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, 则 $\sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha) =$

- A. $\frac{5}{3}$ B. $-\frac{5}{3}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

6. 已知非零向量 m 、 n 满足 $|n| = 4|m|$, 且 $m \perp (2m + n)$, 则 m 、 n 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

7. 设曲线 $y = ax - \ln(x+1)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = 2x$, 则 $a =$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 将函数 $f(x) = \cos 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位后得到函数 $g(x)$, 则 $g(x)$ 具有性质

- A. 周期为 π , 最大值为 1, 图像关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 为奇函数
B. 周期为 π , 最大值为 1, 图像关于点 $(\frac{3\pi}{8}, 0)$ 对称, 为奇函数
C. 周期为 π , 最大值为 1, 在 $(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ 上单调递减, 为奇函数

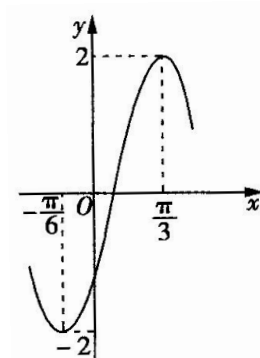
D. 周期为 π ，最大值为 1，在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，为奇函数

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \leq 1 \\ 1 - \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$ ，则满足 $f(x) \leq 2$ 的 x 的取值范围是

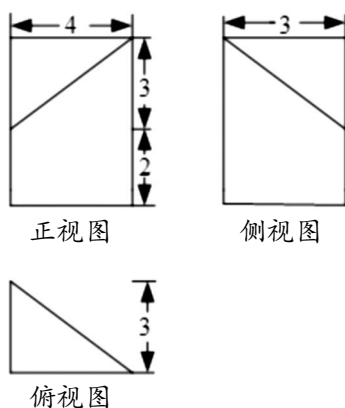
- A. $[-1, 2]$ B. $[0, 2]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

10. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示，则

- A. $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$
 B. $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$
 C. $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$
 D. $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$



11. 若某三棱柱截去一个三棱锥后所剩几何体的三视图如下图所示，则所截去的三棱锥的外接球的表面积等于



- A. 34π B. 32π C. 17π D. $\frac{17\pi}{2}$

12. 若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有极值点 x_1, x_2 ，且 $f(x_1) = x_1$ ，则关于的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的不同实根个数是

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x + 2y \geq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ 2x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x + 6y$ 的最大值为_____.

14. 若数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，且 $a_n = (a_n + 1)a_{n+1}$ ，则 $\frac{a_{200}}{a_{300}} =$ _____.

15. 已知直线 $x - y + a = 0$ 与圆心为 C 的圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 相交于 A, B 两点, 且 $AC \perp BC$, 则实数 a 的值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (1 - a^2)x$ 在 $(0, 1)$ 内存在最小值, 则 a 的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 至 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = b \cos C + c \sin B$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 其前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的各项均为正数, $b_1 = 1$, 公比为 q ($q \neq 1$), 且 $b_2 + S_2 = 12$, $q = \frac{S_2}{b_2}$.

$\neq 1$), 且 $b_2 + S_2 = 12$, $q = \frac{S_2}{b_2}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

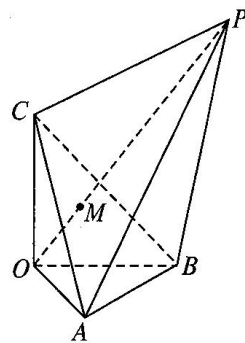
(2) 证明: $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} < \frac{2}{3}$.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 已知三棱锥 $O-ABC$ 的三条侧棱 OA 、 OB 、 OC 两两垂直, $\triangle ABC$ 为等边三角形, M 为 $\triangle ABC$ 内部一点, 点 P 在 OM 的延长线上, 且 $PA=PB$.

(1) 证明: $AB \perp OP$;

(2) 若 $AP:PO:OC = \sqrt{5}:\sqrt{6}:1$, 求二面角 $P-OA-B$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

现有甲、乙两个靶. 某射手向甲靶射击一次, 命中的概率为 $\frac{3}{4}$, 命中得 1 分, 没有命中得 0 分; 向乙靶射击两次, 每次命中的概率为 $\frac{2}{3}$, 每命中一次得 2 分, 没有命中得 0 分. 该射手每次射击的结果相互独立. 假设该射手完成以上三次射击.

(1) 求该射手恰好命中一次的概率;

(2) 求该射手的总得分 X 的分布列及数学期望 EX .

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦距为 4, 其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点, T 为直线 $x = -3$ 上任意一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P, Q .

(i) 证明: OT 平分线 PQ 段 (其中 O 为坐标原点);

(ii) 当 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时, 求点 T 的坐标.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。答题时请写清题号并将相应方框涂黑。

22. (本小题满分 12 分) **选修 4-4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 过点 $P(0, -1)$ ，其参数方程为 $\begin{cases} x = t, \\ y = -1 + \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数)。以坐标原点 O

为极点，轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - \rho = 0$ 。

(1) 求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 若曲线 C_1 与 C_2 相交于 A, B 两点，求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值。

23. (本小题满分 12 分) **选修 4-5：不等式选讲**

已知 $f(x) = |2x - a| - |x + 1|$ ($a \in \mathbb{R}$)。

(1) 当 $a=1$ 时，解不等式 $f(x) > 2$ ；

(2) 若不等式 $f(x) + |x + 1| + x > a^2 - \frac{1}{2}$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。