

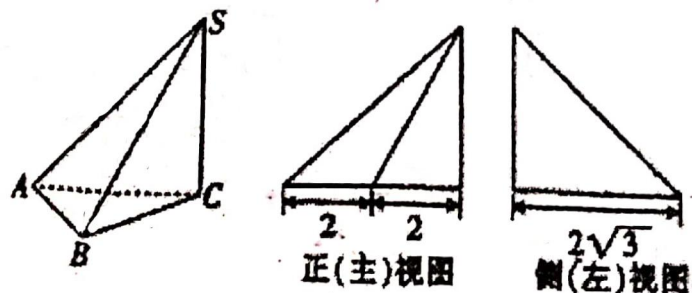
数学(理)试题

命题人: 朱涛 审题人: 王建杰

(满分 150 分, 时间 120 分钟)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

- 若复数 z 满足 $z(2+3i)=i$, 则复数 z 对应的点在
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 已知集合 $A=\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2-4 < 0\}$, $B=\{-2, -1, 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{-2, -1, 1\}$ B. $\{0\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1\}$
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_8=52$, $a_5=7$. 则 $a_4 =$
A. 3 B. 5 C. 6 D. 9
- 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 对实数 a, b , “ $|a| < b$ ” 是 “ $f(a) > f(b)$ ” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x - 7 & (x < 1) \\ \ln x & (x \geq 1) \end{cases}$, 若 $f(a) < 1$, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-\infty, -3)$ B. $(e, +\infty)$ C. $(-3, e)$ D. $(-\infty, -3) \cup (e, +\infty)$
- 若 $\cos(\frac{\pi}{12} - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 则 $\sin 2\alpha + \sqrt{3} \cos 2\alpha$ 的值为
A. $\frac{5}{9}$ B. $-\frac{5}{9}$ C. $\frac{10}{9}$ D. $-\frac{10}{9}$
- 过点 $(-2, 1)$ 的直线 l 与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 6$ 相交于 M, N 两点, 且线段 $|MN| = 2\sqrt{3}$, 则直线 l 的斜率为
A. $\pm\sqrt{3}$ B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. ± 1 D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 某商场进行购物摸奖活动, 规则是: 在一个封闭的纸箱中装有标号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的五个小球, 每次摸奖需要同时取出两个球, 每位顾客最多有两次摸奖机会, 并规定: 若第一次取出的两球号码连号, 则中奖, 摸奖结束; 若第一次未中奖, 则先将这两个小球放回后进行第二次摸球. 若与第一次取出的两个小球号码相同, 则为中奖. 按照这样的规则摸奖, 中奖的概率为
A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{19}{25}$ C. $\frac{23}{50}$ D. $\frac{41}{100}$
- 已知三棱锥 $S-ABC$ 的直观图及其部分三视图如图所示, 若三棱锥 $S-ABC$ 的四个表面中面积最大的一个三角形面积是 $4\sqrt{7}$, 则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球表面积为



- A. $\frac{56}{3}\pi$ B. $\frac{112}{3}\pi$ C. 28π D. 84π

10. 从甲、乙等 7 名志愿者中选 5 人参加周一到周五的社区服务，每天安排一人，每人只参加一天。若要求甲、乙两人至少选一人参加，且当甲、乙两人都参加时，他们参加社区服务的日期不相邻，那么不同的安排种数为

- A. 720 B. 1320 C. 1920 D. 5040

11. 已知过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点，若 D 为线段 AB 的中点，连接 OD 并延长交抛物线 C 于点 M ，若 $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OD}$ ，则 λ 的取值范围是

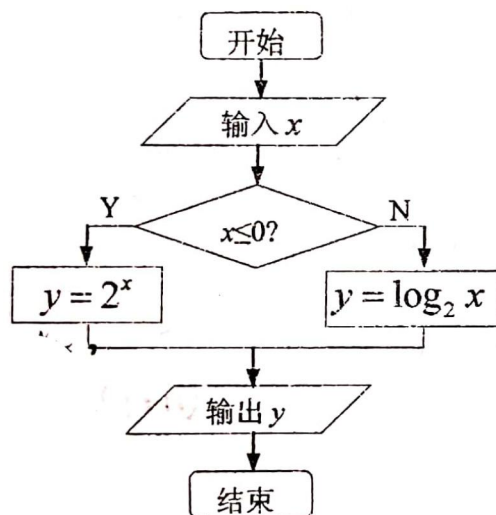
- A. $[3, +\infty)$ B. $(3, +\infty)$ C. $[2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

12. 设 $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，且 $\cos \alpha = \alpha$ ， $\sin(\cos \beta) = \beta$ ， $\cos(\sin \gamma) = \gamma$ ，则 α, β, γ 的大小关系是

- A. $\alpha < \beta < \gamma$ B. $\beta < \alpha < \gamma$ C. $\gamma < \alpha < \beta$ D. $\beta < \gamma < \alpha$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 阅读下面的流程图，若输出 y 的值为 4，则输入 x 的值为_____。



(第 13 题图)

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ y + 2 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 2x - y$ 的最小值为_____。

15. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为角 A, B, C 所对边的长， $a \cos B = \sqrt{2} b \cos A$ ， $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $a = 2\sqrt{2}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是_____。

16. 已知函数 $f(x) = (2x + a)(|x - a| + |x + 2a|)$ ($a < 0$)，若 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100) = 0$ ，则满足 $f(x) = 909$ 的 x 的值为_____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，且 $2a_n + S_n = 6 (n \in \mathbb{N}^*)$ 。

(1) 求证： $\{a_n\}$ 是等比数列；

(2) 在 a_1 和 a_n 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数成等差数列，记插入的 n 个数的和为 T_n ，求 T_n 。

18. (12 分) 为了研究学生的数学核心素养与抽象(能力指标 x)、推理(能力指标 y)、建模(能力指标 z)的相关性，并将它们各自量化为 1、2、3 三个等级分，再用综合指标 $w = x + y + z$ 的值评定学生的数学核心素养。若 $w \geq 7$ ，则数学核心素养为一级；若 $5 \leq w \leq 6$ ，则数学核心素养为二级；若 $3 \leq w \leq 4$ ，则数学核心素养为三级。为了了解某校学生的数学核心素养，调查人员随机访问了某校 10 名学生，得到如下统计数据：

学生编号	A1	A2	A3	A4	A5
(x, y, z)	(2, 2, 3)	(3, 2, 3)	(3, 3, 3)	(1, 2, 2)	(2, 3, 2)
学生编号	A6	A7	A8	A9	A10
(x, y, z)	(2, 3, 3)	(2, 2, 2)	(2, 3, 3)	(2, 1, 1)	(2, 2, 2)

(1) 在这 10 名学生中任取两人，求这两人的建模能力指标相同的概率；

(2) 填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为推理能力指标 y 与数学核心素养有关。

	推理能力指标 $y < 3$	推理能力指标 $y = 3$
数学核心素养是一级		
数学核心素养不是一级		

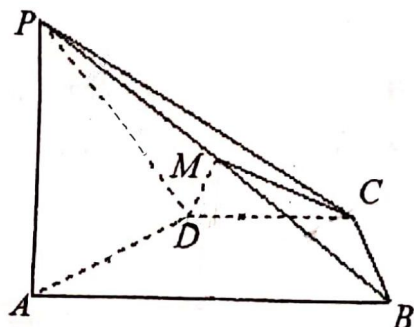
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

19. (12 分) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle DAB = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AB = 2DC$ ， M 分别是线段 PB 的中点。

(1) 在线段 AB 上找出一一点 N ，使得平面 $CMN \parallel$ 平面 PAD ，并给出证明过程；

(2) 若 PC 和平面 PAD 所成的角为 30° ， $AD = DC$ ，求二面角 $P-DM-C$ 的余弦值。



20. (12分) 已知点 $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 椭圆 C 上不与 P 点重合的两点 D, E 关于原点 O 对称, 直线 PD, PE 分别交 y 轴于 M, N 两点。求证: 以 MN 为直径的圆过定点, 并求出定点坐标

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x (a \in \mathbf{R})$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f(x)$ 有两个不相同的零点 x_1, x_2 , 设 $p = x_1 f'(x_1) + x_2 f'(x_2) - 2 \ln a$; 判断 p 与 2 的大小, 并给出证明。

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. (10分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C_1 的方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 。以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系。

(1) 求直线 l 和曲线 C_1 的极坐标方程;

(2) 曲线 $C_2: \theta = \alpha \left(\rho > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ 分别交直线 l 和曲线 C_1 于点 A, B , 求 $\frac{|OB|}{|OA|}$ 的最大值及相应 α 的值。

23. (10分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x+a| + |2x-b|$ 的最小值为 2。

(1) 求 $a+b$ 的值;

(2) 若 $a > 0, b > 0$, 求证: $a+b \geq 5 - \log_2 \left(\frac{9}{a} + \frac{1}{b} \right)$ 。