西南大学附属中学校高 2019 级第九次月考

数 学 试 题（理）

2019 年 4 月

（全卷共 150 分，考试时间为 120 分钟）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 作答时，务必将答案写在答题卡上，写在本试卷及草稿纸上无效.
3. 考试结束后，将答题卡交回（试题卷自己保管好，以备评讲）.

一、选择题：本大题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合 $U=\{-1,0,1,2\}$，$A=\{y\mid y=\sqrt{x^2+1},x\in U\}$，则集合 A 的真子集个数为（ C ）

A. 2　　B. 3　　C. 7　　D. 8

2. 我们用 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部，用 $\mathrm{Im}(z)$ 表示复数 z 的虚部，若已知复数 z 满足 $\overline{z}(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，
$\overline{z}=1+i$
其中 $\overline{z}$ 是复数 z 的共轭复数，则 $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=$（ A ）

$1-i$　　1　-1

A. 0　　B. -1　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若其前 n 项和 S_n 满足 $S_7-S_2=45$，则 $a_5=$（ B ）

A. 7　　B. 9　　C. 14　　D. 18

4. 袋中装有大小相同的四个球，四个球上分别标有数字“2”“0”“1”“9”．现从中随机选出三个球，则所选的三个球上的数字能构成等差数列的概率为（ D ）　$\frac{1}{C_4^3}$

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

5. 若两个单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，$k\in\mathbf{R}$，则 $|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|$ 的最小值为（ A ）B　k^2+k+1

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

$X>4=0.12$

6. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$ 且 $P(X\leqslant 4)=0.88$，则 $P(0<X<4)=$（ B ）

A. 0.88　　B. 0.76　　C. 0.24　　D. 0.12

7. 若 $(3x+\sqrt{x})^n$ 展开式的二项式系数之和为 32，则展开式中含 x^3 项的系数为（ D ）

A. 40　　B. 30　　C. 20　　D. 15

8. 关于 x 的不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是（ D ）

A. $(-\frac{3}{5},1)$　　B. $[-\frac{3}{5},1]$　　C. $(-\frac{3}{5},1]\cup\{-1\}$　　D. $(-\frac{3}{5},1]$

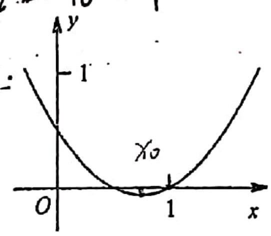
$a^2-1<0$

9．将函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度，再将所得图像上的每个点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，所得图像关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，则 φ 的最小正值为（ C ）

A．$\frac{\pi}{12}$　　　B．$\frac{\pi}{6}$　　　C．$\frac{5\pi}{12}$　　　D．$\frac{5\pi}{6}$

10．如图是函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的部分图像，则函数 $g(x)=\ln x+f'(x)$ 的零点所在的区间是（ A B ）

$1+a+b=0$　$0<b<1$　$f'(x)=2x+a$　$a\approx-1.5$



A．$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$　　　B．$(\frac{1}{2},1)$

C．$(1,2)$　　　D．$(2,3)$

11．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1,F_2$ 为其左、右焦点，P 为椭圆 C 上除长轴端点外的任一点，$\triangle F_1PF_2$ 的重心为 G，内心为 I，且有 $\overrightarrow{IG}=\lambda\overrightarrow{F_1F_2}$（其中 λ 为实数），则椭圆 C 的离心率 $e=$（ A ）

A．$\frac{1}{2}$　　　B．$\frac{1}{3}$　　　C．$\frac{2}{3}$　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

12．对于函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，设 $x_1\in\{x|f(x)=0\}$，$x_2\in\{x|g(x)=0\}$，若对所有的 x_1,x_2，都有 $|x_1-x_2|\leqslant1$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为"零点相邻函数"．若函数 $f(x)=e^{x-1}+x-2$ 与 $g(x)=x^2-ax-a+3$ 互为"零点相邻函数"，则实数 a 的取值范围是（ D ）　$x=1$

A．$[2,4]$　　　B．$[2,\frac{7}{3}]$　　　C．$[\frac{7}{3},3]$　　　D．$[2,3]$

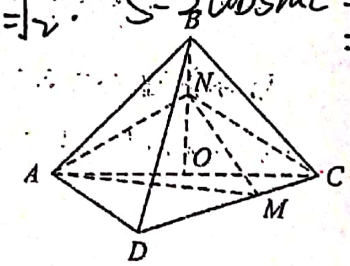
二、填空题：本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分．

13．已知实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}x+y-1\leqslant0\\x-y-1\leqslant0\\x\geqslant0\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最大值为 2 ．

14．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c，若 $\cos C=\frac{1}{4}$，$c=3$，且 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$，则 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ ．

$a=\sqrt{2}$．$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sin C$

15．直线 $x+y\sin\alpha-1=0(\alpha\in\mathbf{R})$ 的倾斜角的取值范围是 $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ ．



16．已知正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{2}$，将 $\triangle ABC$ 沿对角线 AC 折起，使平面 $ABC\perp$ 平面 ACD，得到如图所示的三棱锥 $B-ACD$，若 O 为 AC 的中点，M,N 分别为 DC,BO 上的动点(不包括端点)，且 $BN=CM$，则三棱锥 $N-AMC$ 的体积取得最大值时，三棱锥 $N-ADC$ 的内切球的半径为 ______．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. （本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(3\pi+x)\cdot\cos(\pi-x)+\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)$．

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 在△ABC 中，A, B, C 的对边分别为 a, b, c，若 $f(A)=\frac{3}{2}$，$a=2$，$b+c=4$，求 b，c．

18. （本小题满分 12 分）某竞赛的题库系统有 60%的自然科学类题目，40%的文化生活类题目（假设题库中的题目总数非常大），参赛者需从题库中抽取 3 个题目作答，有两种抽取方法：方法一是直接从题库中随机抽取 3 个题目；方法二是先在题库中按照题目类型用分层抽样的方法抽取 10 个题目作为样本，再从这 10 个题目中任意抽取 3 个题目．

(1) 两种方法抽取的 3 个题目中，恰好有 1 个自然科学类题目和 2 个文化生活类题目的概率是否相同？若相同，说明理由；若不同，分别计算出两种抽取方法对应的概率；

(2) 已知某参赛者抽取的 3 个题目恰好有 1 个自然科学类题目和 2 个文化生活类题目，且该参赛者答对自然科学类题目的概率为 $\frac{3}{4}$，答对文化生活类题目的概率为 $\frac{2}{3}$．设该参赛者答对的题目数为 X，求 X 的分布列和数学期望．

19. （本小题满分 12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2，过 F_1 任作一条与两坐标轴都不垂直的直线，与椭圆 C 交于 A, B 两点，且△ABF_2 的周长为 8．当直线 AB 的斜率为 $\frac{3}{4}$ 时，AF_2 与 x 轴垂直．

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 在 x 轴上是否存在定点 M，总能使 MF_1 平分 $\angle AMB$？说明理由．

20. （本小题满分 12 分）如图 1，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，$\angle DAB=60°$，点 E 是 AB 的中点，点 F 是 CD 的中点．分别沿 DE, BF 将△ADE 和△CBF 折起，使得面 ADE // 面 CBF（点 A, C 在平面 $BFDE$ 的同侧），连接 AC，CE，如图 2 所示．

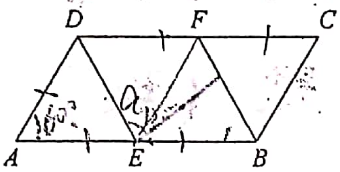


图 1

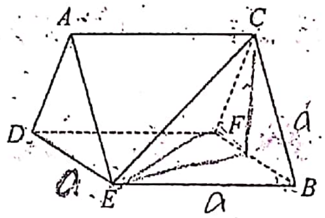


图 2

(1) 求证：$CE \perp BF$；

(2) 当 $AD=2$，且面 $CBF \perp$ 面 $BFDE$ 时，求二面角 $B-AC-D$ 的余弦值.

21．(本小题满分 12 分) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\frac{1}{2}f'(1)e^{2x-2}+x^2-2f(0)x$，　-12

$g(x)=\frac{1}{2}f\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{8}$．　$g(x)$ 判断一阶导数 一阶看正负 包含隐零点 何时找 $g'(x)$

(1) 求函数 $g(x)$ 的单调区间；

(2) 如果 $x_1 \neq x_2$，且 $g(x_1)+g(x_2)=4$，求证：$x_1+x_2<1$.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分．

22．(本小题满分 10 分) **【选修 4—4：坐标系与参数方程】**

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1:\begin{cases}x=\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

(1) 分别求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 设直线 l 交曲线 C_1 于 O，M 两点，交曲线 C_2 于 O，N 两点，求 MN 的长.

23．(本小题满分 10 分) **【选修 4—5：不等式选讲】**

已知函数 $f(x)=2-x^2$，$g(x)=|x-a|$.

(1) 若 $a=1$，解不等式 $f(x)+g(x)\geqslant 3$；

(2) 若不等式 $f(x)>g(x)$ 至少有一个负数解，求实数 a 的取值范围.