数学学科

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若集合 $A=\{x|x^2-5x+4<0\}$,$B=\{x|(x-a)^2<1\}$,则“$a\in(2,3)$”是“$B\subseteq A$”的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知复数 $z=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$,则 z 的共轭复数为　(　　)

A. $3-2\mathrm{i}$　　B. $3+2\mathrm{i}$　　C. $-3-2\mathrm{i}$　　D. $-3+2\mathrm{i}$

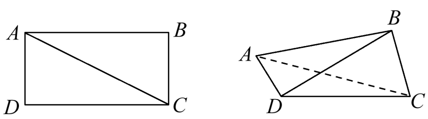
3. 若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　(　　)

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

4. 等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$的首项均为 1,公差与公比均为 3,则 $a_{b_1}+a_{b_2}+a_{b_3}=$　(　　)

A. 64　　B. 32　　C. 38　　D. 33

5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=8$,$BC=6$,现沿 AC 折起,使得平面 $ABC\perp$平面 ADC,连接 BD,得到三棱锥 B-ACD,则其外接球的体积为　(　　)



A. $\dfrac{500\pi}{9}$　　B. $\dfrac{250\pi}{3}$　　C. $\dfrac{1\ 000\pi}{3}$　　D. $\dfrac{500\pi}{3}$

6. 函数 $y=f(x)$在$(0,2)$上是减函数,函数 $y=f(x+2)$是偶函数,则　(　　)

A. $f\left(\dfrac{10}{3}\right)<f\left(\dfrac{7}{3}\right)<f\left(\dfrac{4}{3}\right)$

B. $f\left(\dfrac{4}{3}\right)<f\left(\dfrac{10}{3}\right)<f\left(\dfrac{7}{3}\right)$

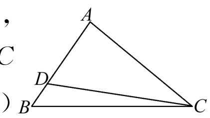
C. $f\left(\dfrac{10}{3}\right)<f\left(\dfrac{4}{3}\right)<f\left(\dfrac{7}{3}\right)$

D. $f\left(\dfrac{7}{3}\right)<f\left(\dfrac{4}{3}\right)<f\left(\dfrac{10}{3}\right)$

7. 设直线 l 过双曲线 C 的一个焦点,且与 C 的一条对称轴垂直,l 与 C 交于 A,B 两点,$|AB|$为 C 的实轴长的 2 倍,则 C 的离心率为　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

8. 如图,在$\triangle ABC$ 中,D 是 AB 边上的点,且满足 $AD=3BD$,$AD+AC=BD+BC=2$,$CD=\sqrt{2}$,则 $\cos A=$　(　　)



A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. 0

9. 已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x-\dfrac{1}{3}x^3$,则不等式 $f(2x+3)+f(1)<0$ 的解集为　(　　)

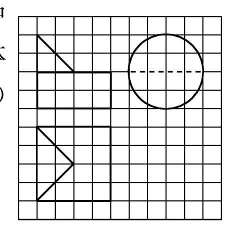
A. $(-2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2)$

C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

10. 过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点作垂直于 x 轴的直线与椭圆有四个交点,且这四个交点恰好为正方形的四个顶点,则椭圆的离心率为　(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

11. 某几何体的三视图如图所示,若图中小正方形的边长均为 1,则该几何体的体积是　(　　)



A. $\dfrac{28}{3}\pi$　　B. $\dfrac{32}{3}\pi$

C. $\dfrac{52}{3}\pi$　　D. $\dfrac{56}{3}\pi$

12. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图象相邻两个对称中心之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$,则 $f(x)$的一个单调递减区间为　(　　)

A. $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$

C. $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$

第Ⅱ卷

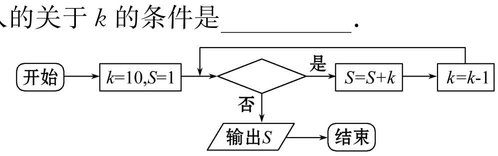
本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13—21 题为必考题,每个实体考生都必须作答. 第 22—23 题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在题中横线上)

13. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-4\leqslant 0,\\ x-2y-2\leqslant 0,\\ x-1\geqslant 0,\end{cases}$ 则$\dfrac{y-1}{x}$的最小值为________.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}a^x,x\geqslant 0,\\ \log_a(x^2+a^2),x<0,\end{cases}$ 且 $f(2)=4$,则 $f(-2)=$________.

15. 某框图所给的程序运行结果为 $S=35$,那么判断框中应填入的关于 k 的条件是__________.



16. 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c. 若 $c^2=(a-b)^2+6$,$C=\dfrac{\pi}{3}$,则$\triangle ABC$ 的面积是________.

三、解答题(解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤,17—21 题每小题 12 分,22—23 题每小题 10 分)

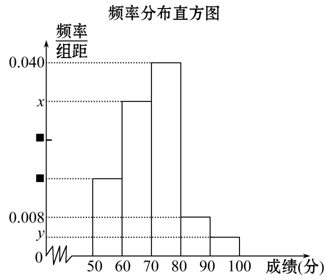
17. 已知公比不为 1 的等比数列$\{a_n\}$的前 3 项积为 27,且 $2a_2$ 为 $3a_1$ 和 a_3 的等差中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

(2)若数列$\{b_n\}$满足

$b_n=b_{n-1}\cdot\log_3 a_{n+1}$（$n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$），且 $b_1=1$，求数列 $\left\{\dfrac{b_n}{b_{n+2}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 共享单车是指由企业在校园、公交站点、商业区、公共服务区等场所提供的自行车单车共享服务，由于其依托“互联网＋”，符合“低碳出行”的理念，已越来越多地引起了人们的关注. 某部门为了对该城市共享单车加强监管，随机选取了 50 人就该城市共享单车的推行情况进行问卷调查，并将问卷中的这 50 人根据其满意度评分值（百分制）按照[50，60)，[60，70)，…，[90，100]分成 5 组，请根据下面尚未完成并有局部污损的频率分布表和频率分布直方图（如图所示）解决下列问题：



组别	分组	频数	频率
第 1 组	[50，60)	8	0.16
第 2 组	[60，70)	a	[redacted]
第 3 组	[70，80)	20	0.40
第 4 组	[80，90)	[redacted]	0.08
第 5 组	[90，100]	2	b
	合计	[redacted]	[redacted]

（1）求出 a,b,x,y 的值.

（2）若在满意度评分值为[80，100]的人中随机抽取 2 人进行座谈，求 2 人中至少一人来自第 5 组的概率.

19. 在四棱锥 S-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $SAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $SA=2AD=3AB$.

（1）证明：$SA\perp$ 平面 $ABCD$.

（2）若点 E 为 SC 的中点，三棱锥 E-BCD 的体积为 $\dfrac{8}{9}$，求四棱锥 S-$ABCD$ 外接球的表面积.

20. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P，与抛物线 C 的交点为 Q，且 $|QF|=2|PQ|$.

（1）求 p 的值.

（2）已知点 $T(t,-2)$ 为 C 上一点，M,N 是 C 上异于点 T 的两点，且满足直线 TM 和直线 TN 的斜率之和为 $\dfrac{8}{3}$，证明：直线 MN 恒过定点，并求出定点的坐标.

21. 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{2}x^2-(a+1)x$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-2$，求 $f(x)$ 的单调区间.

（2）若 $x>0$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{f'(x)}{2}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22—23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22.（选修 4—4：坐标系与参数方程）在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$.

（1）若直线 l 与曲线 C 相切，求直线 l 的直角坐标方程.

（2）若 $\tan\alpha=2$，设直线 l 与曲线 C 的交点为点 A,B，求 $\triangle OAB$ 的面积.

23.（选修 4—5：不等式选讲）已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+1|$，$g(x)=|a-1|-a|x|$.

（1）当 $x<0$ 时，求不等式 $f(x)<4$ 的解集.

（2）设函数 $f(x)$ 的值域为 M，函数 $g(x)$ 的值域为 N，若满足 $M\cap N\neq\varnothing$，求 a 的取值范围.

答案解析

数学学科

第Ⅰ卷

一、选择题

1. 选 A. $A=\{x|1<x<4\}$，$B=\{x|a-1<x<a+1\}$.

因为 $B\subseteq A$，所以 $\begin{cases}a-1\geqslant 1,\\ a+1\leqslant 4,\end{cases}$ 即 $2\leqslant a\leqslant 3$.

因为 $(2,3)\subseteq[2,3]$，所以“$a\in(2,3)$”是“$B\subseteq A$”的充分不必要条件.

2. 选 B. $z=\dfrac{2+3i}{i}=3-2i$，因此 z 的共轭复数为 $3+2i$.

3. 选 C. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{b}|^2(2\cos\theta+1)=0$，

又因为 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，所以 $2\cos\theta+1=0$，所以 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\theta=120°$.

4. 选 D. 依题意：$a_n=1+3(n-1)=3n-2$，$b_n=3^{n-1}$，则 $b_1=1$，$b_2=3$，$b_3=9$，

所以 $a_{b_1}+a_{b_2}+a_{b_3}=a_1+a_3+a_9=1+7+25=33$.

5. 选 D. 结合几何体的特征可得，外接球的球心为 AC 的中点，外接球半径为 $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2+BC^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{8^2+6^2}=5$，则外接球的体积：$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{500\pi}{3}$.

6. 选 D. 因为函数 $y=f(x)$ 在 $(0,2)$ 上为减函数，函数 $y=f(x+2)$ 为偶函数，所以函数关于 $x=2$ 对称，函数在 $(2,4)$ 为增函数，所以自变量离 2 距离越近，函数值越小，

因为 $\dfrac{10}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\in(0,4)$，且 $\left|\dfrac{10}{3}-2\right|>\left|2-\dfrac{4}{3}\right|>\left|\dfrac{7}{3}-2\right|$，

所以 $f\left(\dfrac{7}{3}\right)<f\left(\dfrac{4}{3}\right)<f\left(\dfrac{10}{3}\right)$.

7. 选 B. 设双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，焦点 $F(-c,0)$，将 $x=-c$ 代入 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可得 $y^2=\dfrac{b^4}{a^2}$，所以 $|AB|=2\times\dfrac{b^2}{a}=2\times 2a$，所以 $b^2=2a^2$，$c^2=a^2+b^2=3a^2$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$.

8. 选 D. 设 $BD=x$，则 $AD=3x$，$AC=2-3x$，$BC=2-x$，易知 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，由余弦定理的推论可得

$\dfrac{9x^2+2-(2-3x)^2}{2\times\sqrt{2}\times 3x}=-\dfrac{x^2+2-(2-x)^2}{2\times\sqrt{2}\times x}$，

解得 $x=\dfrac{1}{3}$，故 $AD=1$，$AC=1$，

所以 $\cos A=\frac{AD^2+AC^2-CD^2}{2\times AD\times AC}=0$.

9. 选 A. 易证函数 $f(x)$是奇函数. 由题得 $f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x-x^2=-x\sin x-x^2=-x(\sin x+x)$.

所以当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，函数在$(0,+\infty)$上单调递减，

因为函数是奇函数，

所以函数在$(-\infty,0)$上单调递减，

因为 $f(2x+3)+f(1)<0$，所以 $f(2x+3)<-f(1)=f(-1)$，所以 $2x+3>-1$，所以 $x>-2$.

故解集为$(-2,+\infty)$.

10. 选 B. 因为过椭圆的两个焦点作垂直于 x 轴的直线与椭圆有四个交点，且这四个交点恰好为正方形的四个顶点，所以 $c=\frac{b^2}{a}$，即 $ac=a^2-c^2$，所以 $e^2+e-1=0$，因为 $0<e<1$，所以 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

11. 选 A. 由三视图可知，该几何体是由半个圆柱与半个圆锥组合而成，其中圆柱的底面半径为 2，高为 4，圆锥的底面半径和高均为 2，其体积为 $V=\frac{1}{2}\times4\pi\times4+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times4\pi\times2=\frac{28\pi}{3}$.

12. 选 D. $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象相邻两个对称中心之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，于是有 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，$\omega=2$，

所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

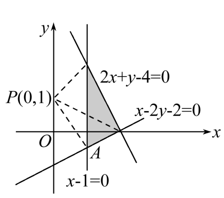
当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$单调递减. 因此结合各选项知，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的一个单调递减区间为$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

第 Ⅱ 卷

二、填空题

13.【解析】作出不等式组表示的可行域如图中阴影部分所示，因为$\frac{y-1}{x}$表示可行域内的点与定点 $P(0,1)$连线的斜率. 由图知，点 $P(0,1)$与点 $A\left(1,-\frac{1}{2}\right)$连线的斜率最小，



所以$\left(\frac{y-1}{x}\right)_{\min}=k_{PA}=\frac{-\frac{1}{2}-1}{1-0}=-\frac{3}{2}$.

答案：$-\frac{3}{2}$

14.【解析】因为 $f(2)=4$，即 $a^2=4$，所以 $a=\pm2$，又因为 a 是底数，所以$a=-2$ 舍去，

所以 $a=2$，所以 $f(-2)=\log_2 8=3$.

答案：3

15.【解析】由题意可知输出结果为 $S=35$，

第 1 次循环，$S=11$，$k=9$，第 2 次循环，$S=20$，$k=8$，第 3 次循环，$S=28$，$k=7$，第 4 次循环，$S=35$，$k=6$，此时 S 满足输出结果，退出循环，所以判断框中的条件为：$k>6$ 或 $k\geqslant7$?

答案：$k>6$? 或 $k\geqslant7$?

16.【解析】因为 $c^2=(a-b)^2+6$，所以 $c^2=a^2+b^2-2ab+6$. ①

因为 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=a^2+b^2-ab$. ②

由①②得$-ab+6=0$，即 $ab=6$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

三、解答题

17.【解析】(1)由前 3 项积为 27，得 $a_2=3$，设等比数列的公比为 q，

由 $2a_2$ 为 $3a_1$ 和 a_3 的等差中项，得 $3\cdot\frac{3}{q}+3q=4\times3$，由公比不为 1，解得：$q=3$，

所以 $a_n=3^{n-1}$.

(2)由 $b_n=b_{n-1}\cdot\log_3 a_{n+1}=b_{n-1}\cdot n$，

得 $b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1=n!$.

令 $c_n=\frac{b_n}{b_{n+2}}=\frac{n!}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，

则 $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$

18.【解析】(1)由题意可知，$\frac{8}{2}=\frac{0.16}{b}$，

解得 $b=0.04$.

所以$[80,90)$内的频数为 $2\times2=4$，所以样本容量 $n=\frac{8}{0.16}=50$，$a=50-8-20-4-2=16$.

又$[60,70)$内的频率为$\frac{16}{50}=0.32$，

所以 $x=\frac{0.32}{10}=0.032$；

$[90,100]$内的频率为 0.04，所以 $y=\frac{0.04}{10}=0.004$.

(2)第 4 组共有 4 人，第 5 组共有 2 人，

设第 4 组的 4 人分别为 a_1,a_2,a_3,a_4；第 5 组的 2 人分别为 b_1,b_2，

则从中任取 2 人，所有基本事件为(a_1,a_2)，(a_1,a_3)，(a_1,a_4)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,a_3)，(a_2,a_4)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,a_4)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，(a_4,b_1)，(a_4,b_2)，(b_1,b_2)共 15 个.

又至少一人来自第 5 组的基本事件有(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_4,b_1)，(a_4,b_2)，(b_1,b_2)，(a_2,b_2)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，(a_2,b_1)共 9 个，

所以 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. 故所抽取 2 人中至少一人来自第 5 组的概率为$\frac{3}{5}$.

19.【解析】(1)由底面 $ABCD$ 为矩形，得 $BC\perp AB$.

又平面 $SAB\perp$平面 $ABCD$，平面 $SAB\cap$平面 $ABCD=AB$，$BC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $BC\perp$平面 SAB，所以 $BC\perp SA$.

同理可得 $CD\perp SA$.

又 $BC\cap CD=C$，$BC\subset$平面 $ABCD$，$CD\subset$平面 $ABCD$，

所以 $SA\perp$平面 $ABCD$.

(2)设 $SA=6a$，则 $AB=2a$，$AD=3a$.

$V_{E\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times h$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times BC\times CD\right)\times\left(\frac{1}{2}SA\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 3a\times 2a\right)\times(3a)=3a^3$.

又因为 $V_{E\text{-}BCD}=\frac{8}{9}$,

所以 $3a^3=\frac{8}{9}$,解得 $a=\frac{2}{3}$.

四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的外接球是以 AB,AD,AS 为棱的长方体的外接球,设半径为 R.

则 $2R=\sqrt{AB^2+AD^2+AS^2}=7a=\frac{14}{3}$,

即 $R=\frac{7}{3}$.

所以四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{196\pi}{9}$.

20.【解析】(1)设 $Q(x_0,4)$,由抛物线定义,

得 $|QF|=x_0+\frac{p}{2}$,

又因为 $|QF|=2|PQ|$,

即 $2x_0=x_0+\frac{p}{2}$,解得 $x_0=\frac{p}{2}$.

将点 $Q\left(\frac{p}{2},4\right)$代入抛物线方程,解得 $p=4$.

(2)由(1)知 C 的方程为 $y^2=8x$,所以点 T 坐标为 $\left(\frac{1}{2},-2\right)$,

设直线 MN 的方程为 $x=my+n$,

点 $M\left(\frac{y_1^2}{8},y_1\right)$,$N\left(\frac{y_2^2}{8},y_2\right)$.

由$\begin{cases}x=my+n,\\y^2=8x,\end{cases}$得 $y^2-8my-8n=0$,

所以 $y_1+y_2=8m$,$y_1y_2=-8n$,

所以 $k_{MT}+k_{NT}=\dfrac{y_1+2}{\frac{y_1^2}{8}-\frac{1}{2}}+\dfrac{y_2+2}{\frac{y_2^2}{8}-\frac{1}{2}}$

$=\frac{8}{y_1-2}+\frac{8}{y_2-2}$

$=\frac{8(y_1+y_2)-32}{y_1y_2-2(y_1+y_2)+4}=\frac{64m-32}{-8n-16m+4}$

$=-\frac{8}{3}$,解得 $n=m-1$,

所以直线 MN 的方程为 $x+1=m(y+1)$,恒过点$(-1,-1)$.

21.【解析】(1)由已知得

$f'(x)=\frac{1}{x}+ax-(a+1)$,则 $f'(1)=0$,

而 $f(1)=-\frac{a}{2}-1$,

所以曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处的切线方程为

$y=-\frac{a}{2}-1$,所以$-\frac{a}{2}-1=-2$,解得 $a=2$.

所以 $f(x)=\ln x+x^2-3x$,

$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{2x^2-3x+1}{x}$

由 $f'(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x}>0$,得 $0<x<\frac{1}{2}$或 $x>1$,

由 $f'(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x}<0$,得$\frac{1}{2}<x<1$

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$,

$(1,+\infty)$,$f(x)$的单调递减区间为$\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(2)若$\frac{f(x)}{x}<\frac{f'(x)}{2}$,则$\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{2}x-(a+1)<\frac{1}{2x}+\frac{ax}{2}-\frac{a+1}{2}$

即$\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}<\frac{a+1}{2}$在区间$(0,+\infty)$上恒成立.

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}=\frac{3-2\ln x}{2x^2}$.

由 $h'(x)>0$,得 $0<x<e^{\frac{3}{2}}$,所以 $h(x)$在$(0,e^{\frac{3}{2}})$上单调递增,

由 $h'(x)<0$,得 $x>e^{\frac{3}{2}}$,

所以 $h(x)$在$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$上单调递减,

所以 $h(x)$的最大值为 $h(e^{\frac{3}{2}})=e^{-\frac{3}{2}}$,

由$\frac{a+1}{2}>e^{-\frac{3}{2}}$可得 $a>2e^{-\frac{3}{2}}-1$,

所以实数 a 的取值范围是$(2e^{-\frac{3}{2}}-1,+\infty)$.

22.【解析】(1)由 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$ 可得曲线C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$,即$(x-1)^2+(y-2)^2=1$,

$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$消去参数$t$,可得 $y=\tan\alpha(x-1)$.设 $k=\tan\alpha$,则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,

由题意,得圆心$(1,2)$到直线 l 的距离 $d_1=\frac{|k-2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=\pm\sqrt{3}$,

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y=\pm\sqrt{3}(x-1)$.

(2)因为 $\tan\alpha=2$,

所以直线 l 的方程为 $2x-y-2=0$,

原点到直线 l 的距离 $d_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

联立$\begin{cases}2x-y-2=0,\\(x-1)^2+(y-2)^2=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{8}{5},\\y=\frac{6}{5},\end{cases}$

所以$|AB|=\sqrt{\left(2-\frac{8}{5}\right)^2+\left(2-\frac{6}{5}\right)^2}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}$,所以 $S=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$.

23.【解析】(1)当 $x<0$ 时,$2x-1<0$,所以 $f(x)<4$ 可化为

$|2x+1|-2x<3$. ①

当 $x\leqslant-\frac{1}{2}$时,①化为$-2x-1-2x<3$,解得 $x>-1$,

此时$-1<x\leqslant-\frac{1}{2}$.

当$-\frac{1}{2}<x<0$ 时,①化为 $2x+1-2x<3$,解得 $x\in\mathbf{R}$,

此时$-\frac{1}{2}<x<0$.

综上,原不等式的解集是$\{x|-1<x<0\}$.

(2)因为 $f(x)=|2x-1|+|2x+1|$
$\geqslant|(2x-1)-(2x+1)|=2$,
所以 $f(x)$的值域为$[2,+\infty)$.
当 $a\geqslant0$ 时,因为$|x|\geqslant0$,
所以 $g(x)$的值域为$(-\infty,|a-1|]$.
若 $M\cap N\neq\varnothing$,则$|a-1|\geqslant2$,解得 $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant3$.
从而 $a\geqslant3$.
当$a<0$ 时,因为$|x|\geqslant0$,所以 $g(x)$的值域为$[|a-1|,+\infty)$,此时一定满足 $M\cap N\neq\varnothing$. 从而 $a<0$. 综上,a 的取值范围是$(-\infty,0)\cup[3,+\infty)$.