数学学科

命题角度 1——解析几何

一、选择、填空

押题 1　若抛物线 $y=ax^2$ 的焦点坐标是$(0,1)$，则 $a=$　　(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

押题 2　圆 $C:x^2+y^2-4x+8y-5=0$ 被抛物线 $y^2=4x$ 的准线截得的弦长为　　(　　)

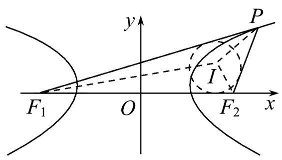
A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

押题 3　直线 $l:y=k(x-\sqrt{2})$ 与曲线 $x^2-y^2=1(x>0)$ 相交于 A,B 两点，则直线 l 倾斜角 α 的取值范围是　　(　　)

A. $[0,\pi)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$

C. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

押题 4　如图，已知点 P 为双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 右支上一点，F_1，F_2 分别为双曲线的左、右焦点，I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，若 $S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+\lambda S_{\triangle IF_1F_2}$ 成立，则 λ 的值为　　(　　)



A. $\frac{5}{8}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

押题 5　已知双曲线 C_2 与椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 具有相同的焦点，则两条曲线相交的四个交点形成的四边形面积最大时双曲线 C_2 的离心率为________.

押题 6　已知直线 $y=-x+1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A,B 两点，且 $OA\perp OB$（O 为坐标原点），若椭圆的离心率 $e\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，则 a 的最大值为________.

二、解答

押题 1　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，右顶点 A 是抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，直线 $l:y=k(x-1)$ 与椭圆 C 相交于 P,Q 两点.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)如果 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$，点 M 关于直线 l 的对称点 N 在 y 轴上，求 k 的值.

押题 2　已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为点 F，以抛物线上一动点 M 为圆心的圆经过点 F. 若圆 M 的面积最小值为 π.

(1)求 p 的值.

(2)当点 M 的横坐标为 1 且位于第一象限时，过点 M 作抛物线的两条弦 MA,MB，且满足 $\angle AMF=\angle BMF$. 若直线 AB 恰好与圆 M 相切，求直线 AB 的方程.

押题 3　已知直线 l 过点$(0,1)$且垂直于 y 轴，若 l 被抛物线 $x^2=4ay$ 截得的线段长为 4.

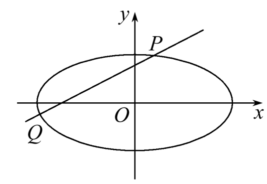
(1)求抛物线 C 的方程.

(2)设点 P 为直线 l 上的点，过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA,PB，其中点 A,B 为切点. 当点 $P(x_0,y_0)$ 为直线 l 上的定点时，求直线 AB 的方程.

押题 4　已知中心在原点 O，焦点在 x 轴上，椭圆在 y 轴上的一个顶点为 M，两个焦点分别是 F_1,F_2，$\angle F_1MF_2=120^\circ$，$\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$.

(1)求椭圆的方程.

(2)设不过原点 O 的直线 l 与该椭圆交于 P,Q 两点，满足直线 OP,PQ,OQ 的斜率依次成等比数列，求 $\triangle OPQ$ 面积的取值范围.



命题角度 2——函数与导数

一、选择、填空

押题 1　偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，若 $f(-1)=0$，则不等式 $\frac{x}{f(x)}<0$ 的解集是　　(　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$

D. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

押题 2　已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-ax+\ln x$ 是减函数，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$　　B. $[4,+\infty)$

C. $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $(-\infty,4]$

押题 3　已知函数 $f(x)=e^x-a(2x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\left(\frac{\sqrt{e}}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{e}}{2},1\right)$

C. $\left[\frac{\sqrt{e}}{2},1\right]$　　D. $(1,+\infty)$

押题 4　已知函数 $f(x)=(ax^2+x-1)e^x$ 在 $x=-1$ 处有极小值，则 $f(x)$ 的极大值为　　(　　)

A. e　　B. $\frac{1}{e}$　　C. 1　　D. -1

押题 5　当 $x\in[-2,1]$ 时，不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $[-5,-3]$　　B. $\left[-6,-\frac{9}{8}\right]$

C. $[-6,-2]$　　D. $[-4,-3]$

押题 6　函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(5x-2)}$ 的定义域是________.

二、解答

押题 1　已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(1)求函数 $y=f(x)$ 的单调区间和最小值.

(2)若函数 $F(x)=\frac{f(x)-a}{x}$ 在 $[1,e]$ 上的最小值为 $\frac{3}{2}$，求 a 的值.

押题 2　设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=f(x)+f'(x)$.

(1)求 $g(x)$ 的单调区间和最小值.

(2)讨论 $g(x)$ 与 $g\left(\frac{1}{x}\right)$ 的大小关系.

押题 3　已知函数 $f(x)=-ax^2+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2)若存在 $x\in(1,+\infty)$,使得 $f(x)>-a$,求 a 的取值范围.

押题4 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$.

(1)若函数 $f(x)$ 有零点,求实数 a 的取值范围.

(2)证明:当 $a\geqslant\frac{2}{e}$ 时,$f(x)>e^{-x}$.

答案解析

—— 数学学科 ——

· 命题角度1——解析几何

一、选择、填空

押题1.【解析】选B.因为抛物线方程为 $x^2=\frac{1}{a}y$,所以其焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$,则有 $\frac{1}{4a}=1$,$a=\frac{1}{4}$.

押题2.【解析】选B.依题意,圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+4)^2=25$,圆心为 $(2,-4)$,半径为5,抛物线 $y^2=4x$ 的准线为 $x=-1$,故弦长为 $2\sqrt{5^2-(2+1)^2}=8$.

押题3.【解析】选B.因为曲线 $x^2-y^2=1(x>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm x$,若直线 $l:y=k(x-\sqrt{2})$ 与曲线 $x^2-y^2=1(x>0)$ 相交于 A,B 两点,则 $k<-1$ 或 $k>1$,而直线 l 的斜率存在,所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$.

押题4.【解析】选B.根据 $S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+\lambda S_{\triangle IF_1F_2}$,即 $|PF_1|=|PF_2|+\lambda|F_1F_2|$,

即 $2a=\lambda 2c$,即 $\lambda=\frac{a}{c}=\frac{4}{5}$.

押题5.【解析】设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,由题意知 $a^2+b^2=4-3=1$,

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得交点的坐标满足 $\begin{cases}x^2=4a^2,\\ y^2=3(1-a)^2\end{cases}$

由椭圆和双曲线关于坐标轴对称知,以它们的交点为顶点的四边形是长方形,

其面积 $S=4|xy|=4\sqrt{4a^2}\cdot\sqrt{3(1-a)^2}=8\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{1-a^2}$

$\leqslant 8\sqrt{3}\cdot\frac{a^2+1-a^2}{2}=4\sqrt{3}$,当且仅当 $a^2=1-a^2$,即 $a^2=\frac{1}{2}$ 时,取等号,此时双曲线的方程为 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$,离心率 $e=\sqrt{2}$.

答案:$\sqrt{2}$

押题6.【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=-x+1,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$

得 $(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2-a^2b^2=0$,

$\Delta=4a^4-4(a^2+b^2)(a^2-a^2b^2)>0$,

可得 $a^2+b^2>1$ 且 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2a^2}{a^2+b^2},\\ x_1x_2=\frac{a^2-a^2b^2}{a^2+b^2},\end{cases}$ 因为 $OA\perp OB$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$,即 $2x_1x_2-(x_1+x_2)+1=0$,所以 $\frac{2(a^2-a^2b^2)}{a^2+b^2}-\frac{2a^2}{a^2+b^2}+1=0$,

整理得 $a^2+b^2=2a^2b^2$,$a^2+a^2-c^2=2a^2(a^2-c^2)$,

$2a^2-a^2e^2=2a^2(a^2-a^2e^2)$,$2a^2=\frac{2-e^2}{1-e^2}=1+\frac{1}{1-e^2}$,

因为 $e\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,所以 $2a^2\in\left[\frac{7}{3},5\right]$,即 $a_{\max}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

答案:$\frac{\sqrt{10}}{2}$

二、解答

押题1.【解析】(1)由抛物线 $y^2=8x$,可得其焦点坐标为 $(2,0)$,

即点 $A(2,0)$,所以 $a=2$.

又因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $c=\sqrt{3}$,所以 $b^2=a^2-c^2=1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设点 $P(x_1,y_1)$,点 $Q(x_2,y_2)$,又因为点 $A(2,0)$,

可得 $\overrightarrow{AP}=(x_1-2,y_1)$,$\overrightarrow{AQ}=(x_2-2,y_2)$,

所以点 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=(x_1+x_2-4,y_1+y_2)$,

所以点 $M(x_1+x_2-2,y_1+y_2)$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$(判别式 $\Delta>0$),

则 $x_1+x_2-2=\frac{8k^2}{4k^2+1}-2=\frac{-2}{4k^2+1}$,$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{-2k}{4k^2+1}$,即点 $M\left(\frac{-2}{4k^2+1},\frac{-2k}{4k^2+1}\right)$.

设点 $N(0,y_3)$,则线段 MN 的中点坐标为 $\left(\frac{-1}{4k^2+1},\frac{-k}{4k^2+1}+\frac{y_3}{2}\right)$.

因为点 M,N 关于直线 l 对称,所以线段 MN 的中点在直线 l 上,

所以 $\frac{-k}{4k^2+1}+\frac{y_3}{2}=k\left(\frac{-1}{4k^2+1}-1\right)$,

解得 $y_3=-2k$,即点 $N(0,-2k)$.

由于点 M,N 关于直线 l 对称,所以点 M,N 所在直线与直线 l 垂直,

所以 $\frac{\frac{-2k}{4k^2+1}-(-2k)}{\frac{-2}{4k^2+1}-0}\cdot k=-1$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

押题2.【解析】(1)由抛物线的性质知,当圆心 M 位于抛物线的顶点时,圆 M 的面积最小,

此时圆的半径为 $|OF|=\frac{p}{2}$,所以 $\frac{\pi p^2}{4}=\pi$,解得 $p=2$.

(2)依题意,得点 M 的坐标为 $(1,2)$,圆 M 的半径为2.

由点 $F(1,0)$ 知,$MF\perp x$ 轴.

由 $\angle AMF=\angle BMF$ 知,弦 MA,MB 所在直线的倾斜角互补,所以 $k_{MA}+k_{MB}=0$.

设 $k_{MA}=k(k\neq 0)$,则直线 MA 的方程为 $y=k(x-1)+2$,

所以 $x=\frac{1}{k}(y-2)+1$,

代入抛物线的方程得,$y^2=4\left[\frac{1}{k}(y-2)+1\right]$,

所以 $y^2-\frac{4}{k}y+\frac{8}{k}-4=0$，所以 $y_A+2=\frac{4}{k}$，$y_A=\frac{4}{k}-2$.

将 k 换成 $-k$，得 $y_B=-\frac{4}{k}-2$，

所以 $k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{y_A-y_B}{\frac{y_A^2}{4}-\frac{y_B^2}{4}}=\frac{4}{y_A+y_B}=\frac{4}{-4}=-1$.

设直线 AB 的方程为 $y=-x+m$，即 $x+y-m=0$.

由直线 AB 与圆 M 相切得，$\frac{|3-m|}{\sqrt{2}}=2$，

解得 $m=3\pm2\sqrt{2}$.

经检验 $m=3+2\sqrt{2}$不符合要求，故 $m=3+2\sqrt{2}$舍去.

所以所求直线 AB 的方程为 $y=-x+3-2\sqrt{2}$.

押题 3.【解析】(1)直线 l 过点(0,1)且垂直于 y 轴，所以 l 的方程为 $y=1$.

又因为 l 被抛物线 $x^2=4ay$ 截得的线段长为 4，又当 $y=1$ 时 $x=\pm\sqrt{4a}$.

即 $2\sqrt{4a}=4$，所以 $a=1$，所以抛物线方程为 $x^2=4y$.

(2)设切点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1^2=4y_1$，$x_2^2=4y_2$.

对 $x^2=4y$(即 $y=\frac{1}{4}x^2$)求导可得 $y'=\frac{1}{2}x$，切线 PA 的斜率为$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{1}{2}x_1$，

将 $x_1^2=4y_1$ 和 $y_0=x_0-2$ 代入整理可得 $2y_1-x_0x_1+2y_0=0$①，同理切线 PB 的斜率为$\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=\frac{1}{2}x_2$，将 $x_2^2=4y_2$ 和 $y_0=x_0-2$ 代入整理可得 $2y_2-x_0x_2+2y_0=0$②，由①②可得点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$都适合方程 $2y-x_0x+2y_0=0$，也就是当点 $P(x_0,y_0)$，为直线 l 上的定点时，直线 AB 的方程即为 $2y-x_0x+2y_0=0$.

押题 4.【解析】(1)由题意可设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由椭圆性质，知$|MF_2|=a$，于是 $c=a\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$b=a\cos 60°=\frac{1}{2}a$.

所以$\triangle MF_1F_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot(2c)\cdot b=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}a)\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)=\sqrt{3}$，解得 $a=2$，$b=1$.

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由题意可知，直线 l 的斜率存在且不为 0，

故可设直线 l：$y=kx+m(m\neq0)$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$消去 y 得：$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$，

则 $\Delta=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-1)=16(4k^2-m^2+1)>0$，

且 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$，

故 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$，

因为直线 OP，PQ，OQ 的斜率依次成等比数列，

所以$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=k^2$，

即$-\frac{8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$.

又 $m\neq0$，所以 $k^2=\frac{1}{4}$，即 $k=\pm\frac{1}{2}$.

由于直线 OP，OQ 的斜率存在，且 $\Delta>0$，

得 $0<m^2<2$，且 $m^2\neq1$，

设 d 为点 O 到直线 l 的距离，则 $d=\frac{|2m|}{\sqrt{5}}$，

$|PQ|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{5(2-m^2)}$，

所以 $S=\frac{1}{2}|PQ|d=\sqrt{m^2(2-m^2)}<\frac{m^2+2-m^2}{2}=1(m^2\neq1)$，故$\triangle OPQ$ 面积的取值范围为(0,1).

· 命题角度 2——函数与导数

一、选择、填空

押题 1.【解析】选 A. 偶函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，则在$(0,+\infty)$上为增函数，若 $f(-1)=0$，则 $f(1)=0$，所以 x，$f(x)$异号的解集是$(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

押题 2.【解析】选 C. 函数定义域为$(0,+\infty)$，因为 $f(x)$是减函数，

所以$f'(x)\leqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，

即$-\frac{1}{x^2}-a+\frac{1}{x}\leqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，

所以 $a\geqslant\frac{x-1}{x^2}$在$(0,+\infty)$上恒成立，

令 $g(x)=\frac{x-1}{x^2}(x>0)$，

$g'(x)=-\frac{x-2}{x^3}$，

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>2$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在(0,2)上是增函数，在$(2,+\infty)$上是减函数.

$g(x)_{\max}=g(2)=\frac{1}{4}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{4}$.

押题 3.【解析】选 B. 函数 $f(x)=e^x-a(2x+1)$在$(0,+\infty)$上有两个零点，即方程 $a=\frac{e^x}{2x+1}$有两个正根.

令 $g(x)=\frac{e^x}{2x+1}$，$g'(x)=\frac{e^x(2x-1)}{(2x+1)^2}$，

当 $0<x<\frac{1}{2}$时，$g'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{2}$时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上是减函数，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上是增函数.

$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{2}$，

又 $g(0)=1$，所以 a 的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{e}}{2},1\right)$.

押题 4.【解析】选 D. $f'(x)=xe^x(ax+2a+1)$，

因为 $f(x)=(ax^2+x-1)e^x$ 在 $x=-1$ 处有极小值，

所以 $f'(-1)=0$，得 $a=-1$.

$f'(x)=-xe^x(x+1)$，

当 $x<-1$ 或 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，当$-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,-1)$上是减函数，在$(-1,0)$上是增函数，在$(0,+\infty)$上是减函数.

当 $x=0$ 时，$f(x)$有极大值 $f(0)=-1$.

押题 5.【解析】选 C. 当 $x\in(0,1]$时，不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant0\Rightarrow a\geqslant\frac{x^2-4x-3}{x^3}$，$x\in(0,1]$恒成立.

令 $g(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^3}$，$x\in(0,1]$，则 $g'(x)=\frac{-x^2+8x+9}{x^4}$，$x\in(0,1]$，

设 $h(x)=-x^2+8x+9$，$h(x)$在$(0,1]$上为增函数，$h(x)>h(0)=9>0$，

所以 $x\in(0,1]$时，$g'(x)=\frac{-x^2+8x+9}{x^4}>0$，则 $g(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^3}$在$(0,1]$上为增函数，

$g(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^3}$，$x\in(0,1]$的最大值 $g(x)_{max}=g(1)=-6$；从而 $a\geqslant-6$；

当 $x=0$ 时，$a\in\mathbf{R}$；

当 $x\in[-2,0)$时，不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant0\Rightarrow a\leqslant\frac{x^2-4x-3}{x^3}$，$x\in[-2,0)$恒成立.

$\begin{cases}g'(x)=\frac{-x^2+8x+9}{x^4}>0\\ x\in[-2,0)\end{cases}\Rightarrow-1<x<0$，

$\begin{cases}g'(x)=\frac{-x^2+8x+9}{x^4}<0\\ x\in[-2,0)\end{cases}\Rightarrow-2<x<-1$，

所以 $g(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^3}$在$[-2,-1)$上为减函数，在$(-1,0)$上为增函数，

故 $g(x)_{min}=g(-1)=-2$，则 $a\leqslant-2$.

综上所述，$-6\leqslant a\leqslant-2$.

押题 6.【解析】依题意有 $\log_{\frac{1}{3}}(5x-2)\geqslant0$，即 $0<5x-2\leqslant1$，

解得 $\frac{2}{5}<x\leqslant\frac{3}{5}$.

答案：$\frac{2}{5}<x\leqslant\frac{3}{5}$

二、解答

押题 1.【解析】(1)$f'(x)=\ln x+1(x>0)$，

由 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{1}{e}$，由 $f'(x)<0$，得 $x<\frac{1}{e}$，

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，单调减区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

所以 $f(x)_{min}=f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

(2)$F(x)=\ln x-\frac{a}{x}$，$F'(x)=\frac{x+a}{x^2}(x\in[1,e])$.

当 $a\geqslant0$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$在$[1,e]$上单调递增，

$F(x)_{min}=F(1)=-a=\frac{3}{2}$，解得 $a=-\frac{3}{2}\notin[0,+\infty)$，舍去.

当 $a<0$ 时，$F(x)$在$(0,-a)$上单调递减，在$(-a,+\infty)$上单调递增.

①若 $a\in[-1,0)$，则 $F(x)$在$[1,e]$上单调递增，$F(x)_{min}=F(1)=-a=\frac{3}{2}$，解得 $a=-\frac{3}{2}\notin[-1,0)$，舍去.

②若 $a\in(-e,-1)$，则 $F(x)$在$[1,-a)$上单调递减，在$(-a,e]$上单调递增，

所以 $F(x)_{min}=F(-a)=\ln(-a)+1=\frac{3}{2}$，

解得 $a=-\sqrt{e}\in(-e,-1)$，

③若 $a\in(-\infty,-e]$，则 $F(x)$在$[1,e]$上单调递减，

$F(x)_{min}=F(e)=1-\frac{a}{e}=\frac{3}{2}$，

解得 $a=-\frac{e}{2}\notin(-\infty,-e]$，舍去.

综上所述，$a=-\sqrt{e}$.

押题 2.【解析】(1)由题设知 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

所以 $g'(x)=\frac{x-1}{x^2}$. 令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$，

当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，故$(0,1)$是 $g(x)$的单调减区间.

当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，

故$(1,+\infty)$是 $g(x)$的单调增区间，

因此，$x=1$ 是 $g(x)$的唯一极值点，且为极小值点，

从而是最小值点.

所以 $g(x)$的最小值为 $g(1)=1$.

(2)$g\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x+x$.

设 $h(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$，

则 $h'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}$.

当 $x=1$ 时，$h(1)=0$，即 $g(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$，

当 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h'(1)=0$.

因此，$h(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减，

当 $0<x<1$ 时，$h(x)>h(1)=0$.

即 $g(x)>g\left(\frac{1}{x}\right)$.

当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，

即 $g(x)<g\left(\frac{1}{x}\right)$.

押题 3.【解析】(1)依题意，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=-2ax+\frac{1}{x}=\frac{1-2ax^2}{x}$.

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$或$-\frac{1}{\sqrt{2a}}$(舍去).

由 $f'(x)>0$，得 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$，

由 $f'(x)<0$，得 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$，

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$上单调递增，

在$\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$上单调递减.

(2)由 $f(x)>-a$ 得 $a(x^2-1)-\ln x<0$，

因为 $x\in(1,+\infty)$，所以$-\ln x<0$，$x^2-1>0$.

当 $a\leqslant0$ 时，$a(x^2-1)-\ln x<0$，满足题意.

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时，设 $g(x)=a(x^2-1)-\ln x(x>1)$，则 $g'(x)=\frac{2ax^2-1}{x}>0$，

所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以 $g(x)>g(1)=0$，不合题意.

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $g'(x)=\frac{2ax^2-1}{x}>0$，得 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$，

由 $g'(x)=\frac{2ax^2-1}{x}<0$，得 $x\in\left(1,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$，

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)<g(1)=0$，

则存在 $x_0\in(1,+\infty)$，使得 $g(x_0)<0$，

综上所述，a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

押题 4.【解析】(1) 函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

由 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，得 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$.

①当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(1)=\ln 1+a=a\leqslant0$，$x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$，

所以函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上有 1 个零点.

②当 $a>0$ 时，则 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$；$x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 所以函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x=a$ 时，$[f(x)]_{\min}=\ln a+1$. 当 $\ln a+1\leqslant0$，即 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$ 时，

又 $f(1)=\ln 1+a=a>0$，

所以函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上有零点.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$.

(2) 要证明当 $a\geqslant\frac{2}{e}$ 时，$f(x)>e^{-x}$，即证明当 $x>0$，$a\geqslant\frac{2}{e}$ 时，$\ln x+\frac{a}{x}>e^{-x}$，即 $x\ln x+a>xe^{-x}$，

令 $h(x)=x\ln x+a$，则 $h'(x)=\ln x+1$，

当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增.

当 $x=\frac{1}{e}$ 时，$[h(x)]_{\min}=-\frac{1}{e}+a$.

于是，当 $a\geqslant\frac{2}{e}$ 时，$h(x)\geqslant-\frac{1}{e}+a\geqslant\frac{1}{e}$. ①

令 $\varphi(x)=xe^{-x}$，则 $\varphi'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$. 所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

当 $x=1$ 时，$[\varphi(x)]_{\max}=\frac{1}{e}$.

于是，当 $x>0$ 时，$\varphi(x)\leqslant\frac{1}{e}$. ②

显然，不等式①、②中的等号不能同时成立.

故当 $a\geqslant\frac{2}{e}$ 时，$f(x)>e^{-x}$.