\ 数学学科 /

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若集合 $A=\{x|x^2-5x+4<0\}$,$B=\{x|(x-a)^2<1\}$,则“$a\in(2,3)$”是“$B\subseteq A$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知复数 $z=\frac{2+3i}{i}$,则 z 的共轭复数为　　(　　)

A. $3-2i$　　B. $3+2i$　　C. $-3-2i$　　D. $-3+2i$

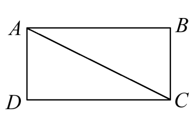
3. 向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$,其中 $0<\alpha<\beta<\pi$,若 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$,则 $\alpha-\beta=$　　(　　)

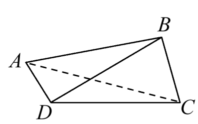
A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $-\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $-\frac{\pi}{4}$

4. 二项式 $\left(ax+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^6$ 的展开式的第二项的系数为 $-\sqrt{3}$,则 $\int_{-2}^{a}x^2\mathrm{d}x$ 的值为　　(　　)

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{11}{3}$

5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=8$,$BC=6$,现沿 AC 折起,使得平面 $ABC\perp$ 平面 ADC,连接 BD,得到三棱锥 B-ACD,则其外接球的体积为　　(　　)





A. $\frac{500\pi}{9}$　　B. $\frac{250\pi}{3}$　　C. $\frac{1\ 000\pi}{3}$　　D. $\frac{500\pi}{3}$

6. 下列函数中,为偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是　　(　　)

A. $f(x)=\cos^2x$　　B. $f(x)=-x^2+3$

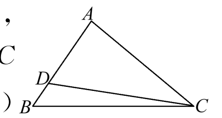
C. $f(x)=x^{\frac{1}{4}}+x^2$　　D. $f(x)=x(3^x-3^{-x})$

7. 点 P 是双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与圆 $C_2:x^2+y^2=a^2+b^2$ 的一个交点,且 $2\angle PF_1F_2=\angle PF_2F_1$,其中 F_1,F_2 分别为双曲线 C_1 的左、右焦点,则双曲线 C_1 的离心率为　　(　　)

A. $\sqrt{3}+1$　　B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D. $\sqrt{5}-1$

8. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,D 是 AB 边上的点,且满足 $AD=3BD$,$AD+AC=BD+BC=2$,$CD=\sqrt{2}$,则 $\cos A=$　　(　　)



A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 0

9. 已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x-\frac{1}{3}x^3$,则不等式 $f(2x+3)+f(1)<0$ 的解集为　　(　　)

A. $(-2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2)$

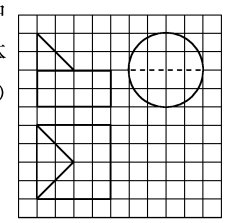
C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

10. 已知函数 $y=a+2\ln x\left(x\in\left[\frac{1}{e},e\right]\right)$ 的图象上存在点 P,函数 $y=-x^2-2$ 的图象上存在点 Q,且点 P,Q 关于原点对称,则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $[e^2,+\infty)$　　B. $\left[3,4+\frac{1}{e}\right]$

C. $\left[4+\frac{1}{e^2},e^2\right]$　　D. $[3,e^2]$

11. 某几何体的三视图如图所示,若图中小正方形的边长均为 1,则该几何体的体积是　　(　　)



A. $\frac{28}{3}\pi$　　B. $\frac{32}{3}\pi$

C. $\frac{52}{3}\pi$　　D. $\frac{56}{3}\pi$

12. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的图象相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,则 $f(x)$ 的一个单调递减区间为　　(　　)

A. $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$

第Ⅱ卷

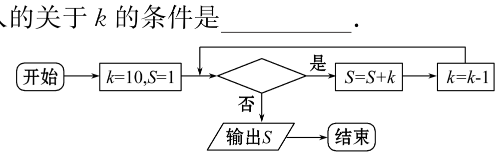
本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13—21 题为必考题,每个实体考生都必须作答. 第 22—23 题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在题中横线上)

13. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-4\leqslant0,\\x-2y-2\leqslant0,\\x-1\geqslant0,\end{cases}$ 则 $\frac{y-1}{x}$ 的最小值为________.

14. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n,$a_1=1$,$a_{n+1}=2S_n+1(n\geqslant1,n\in\mathbf{N}^*)$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是________.

15. 某框图所给的程序运行结果为 $S=35$,那么判断框中应填入的关于 k 的条件是__________.



16. 某航模兴趣小组的同学,为了测定在湖面上航模航行的速度,采用如下办法:在岸边设置两个观察点 A,B,且 AB 长为 80 米,当航模在 C 处时,测得 $\angle ABC=105°$ 和 $\angle BAC=30°$,经过 20 秒后,航模直线航行到 D 处,测得 $\angle BAD=90°$ 和 $\angle ABD=45°$,则航模的速度为_________米/秒.(答案保留根号)

三、解答题(解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤,17—21题每小题12分,22—23题每小题10分)

17. 已知公比不为1的等比数列$\{a_n\}$的前3项积为27,且$2a_2$为$3a_1$和a_3的等差中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n.

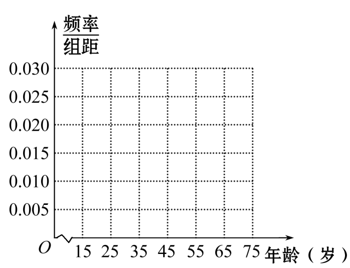
(2)若数列$\{b_n\}$满足

$b_n=b_{n-1}\cdot\log_3 a_{n+1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,且$b_1=1$,求数列$\left\{\dfrac{b_n}{b_{n+2}}\right\}$的前$n$项和$S_n$.

18. 为了缓解城市交通压力和改善空气质量,有些城市出台了一些汽车限行政策,如单双号出行,外地车限行等措施,对城市交通拥堵的缓解和空气质量的改良起了一定的作用.某中部城市为了应对日益增长的交通压力,现组织调研,准备出台新的交通限行政策,为了了解群众对"汽车限行"的态度,在当地市民中随机抽取了100人进行了调查,调查情况如表:

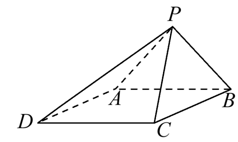
年龄段	[15,25)	[25,35)	[35,45)	[45,55)	[55,65)	[65,75]
频数	5	15	20	n	20	10
赞成人数	3	12	17	18	16	2

(1)求出表格中n的值,并完成被调查人员年龄的频率分布直方图(如图所示).



(2)若从年龄在[45,55)的被调查者中按照是否赞成进行分层抽样,从中抽取10人参与某项调查,然后再从这10人中随机抽取3人参加座谈会,记赞成的人数记为ξ,求ξ的分布列.

19. 如图,在四棱锥P-$ABCD$中,底面$ABCD$是边长为2的菱形,$\angle ABC=60°$,$PA\perp PB$,$PC=2$.



(1)求证:平面$PAB\perp$平面$ABCD$.

(2)若$PA=PB$,求二面角A-PC-D的余弦值.

20. 已知椭圆$C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上、下两个焦点分别为$F_1,F_2$,过$F_1$的直线交椭圆于$M,N$两点,且$\triangle MNF_2$的周长为8,椭圆$C$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆C的标准方程.

(2)已知O为坐标原点,直线:$y=kx+m$与椭圆C有且仅有一个公共点,点M',N'是直线上的两点,且$F_1M'\perp l$,$F_2M'\perp l$,求四边形$F_1M'N'F_2$面积S的最大值.

21. 已知函数$f(x)=\ln x+ax$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性.

(2)当$a=1$时,函数$g(x)=f(x)-x+\dfrac{1}{2x}-m$有两个零点$x_1,x_2$,且$x_1<x_2$.

求证:$x_1+x_2>1$.

请考生在第22—23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.作答时请写清题号.

22. 在直角坐标系xOy中,直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$为参数),以坐标原点$O$为极点,$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$.

(1)若直线l与曲线C相切,求直线l的直角坐标方程.

(2)若$\tan\alpha=2$,设直线l与曲线C的交点为点A,B,求$\triangle OAB$的面积.

23. 已知函数$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$,$g(x)=|a-1|-a|x|$.

(1)当$x<0$时,求不等式$f(x)<4$的解集.

(2)设函数$f(x)$的值域为M,函数$g(x)$的值域为N,若满足$M\cap N\neq\varnothing$,求a的取值范围.

答案解析

数学学科

第Ⅰ卷

一、选择题

1. 选A. $A=\{x|1<x<4\}$,$B=\{x|a-1<x<a+1\}$.

因为$B\subseteq A$,所以$\begin{cases}a-1\geqslant 1,\\a+1\leqslant 4,\end{cases}$即$2\leqslant a\leqslant 3$.

因为$(2,3)\subseteq[2,3]$,所以"$a\in(2,3)$"是"$B\subseteq A$"的充分不必要条件.

2. 选B. $z=\dfrac{2+3i}{i}=3-2i$,因此z的共轭复数为$3+2i$.

3. 选B. 由$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$两边平方整理,得$3|\boldsymbol{a}|^2-3|\boldsymbol{b}|^2+8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

所以$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$,

即$\cos(\alpha-\beta)=0$,因为$0<\alpha<\beta<\pi$,故$-\pi<\alpha-\beta<0$,

所以$\alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{2}$.

4. 选B. 因为$T_{r+1}=C_6^r(ax)^{6-r}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^r=C_6^r a^{6-r}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^r x^{6-r}$,

所以第二项的系数为$C_6^1a^5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}=-\sqrt{3}$,所以$a=-1$,

所以$\displaystyle\int_{-2}^{a}x^2\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{7}{3}$.

5. 选D. 结合几何体的特征可得,外接球的球心为AC的中点,外接球半径为$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2+BC^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{8^2+6^2}=5$,则外接球的体积:$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{500\pi}{3}$.

6. 选D. 观察各选项,其中选项A中的函数不可能在$(0,+\infty)$上为增函数;选项B中的函数在$(0,+\infty)$上为减函数;选项C中的函数定义域不关于原点对称,不是偶函数;选项D中的函数是偶函数,且当$x>0$时,$y=x$单调递增且大于零,函数$y=e^x-e^{-x}$单调递增也大于零,所以$y=x(3^x-3^{-x})$在$(0,+\infty)$上为增函数.

7. 选A. $x^2+y^2=a^2+b^2=c^2$,所以点P在以F_1F_2为直径的圆上,所以$PF_1\perp PF_2$,

又$2\angle PF_1F_2=\angle PF_2F_1$,所以$|PF_2|=c$,$|PF_1|=\sqrt{3}c$,

又P在双曲线上,

所以$\sqrt{3}c-c=2a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

8. 选 D. 设 $BD=x$，则 $AD=3x$，$AC=2-3x$，$BC=2-x$，易知 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，由余弦定理的推论可得

$$\frac{9x^2+2-(2-3x)^2}{2\times\sqrt{2}\times 3x}=-\frac{x^2+2-(2-x)^2}{2\times\sqrt{2}\times x},$$

解得 $x=\frac{1}{3}$，故 $AD=1$，$AC=1$，

所以 $\cos A=\frac{AD^2+AC^2-CD^2}{2\times AD\times AC}=0$.

9. 选 A. 易证函数 $f(x)$是奇函数. 由题得 $f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x-x^2=-x\sin x-x^2=-x(\sin x+x)$.

所以当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，函数在$(0,+\infty)$上单调递减，

因为函数是奇函数，

所以函数在$(-\infty,0)$上单调递减，

因为 $f(2x+3)+f(1)<0$，所以 $f(2x+3)<-f(1)=f(-1)$，所以 $2x+3>-1$，所以 $x>-2$. 故解集为$(-2,+\infty)$.

10. 选 D. 函数 $y=-x^2-2$ 的图象与函数 $y=x^2+2$ 的图象关于原点对称，

若函数 $y=a+2\ln x\left(x\in\left[\frac{1}{e},e\right]\right)$的图象上存在点 P，函数 $y=-x^2-2$ 的图象上存在点 Q，且 P，Q 关于原点对称，则函数 $y=a+2\ln x\left(x\in\left[\frac{1}{e},e\right]\right)$的图象与函数 $y=x^2+2$ 的图象有交点，

即方程 $a+2\ln x=x^2+2\left(x\in\left[\frac{1}{e},e\right]\right)$有解，

即 $a=x^2+2-2\ln x\left(x\in\left[\frac{1}{e},e\right]\right)$有解，

令 $f(x)=x^2+2-2\ln x$，则 $f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x}$，

当 $x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,e]$时，$f'(x)>0$，故当 $x=1$ 时，$f(x)$取最小值 3，

由 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}+4$，$f(e)=e^2$，故当 $x=e$ 时，$f(x)$取最大值 e^2，故 $a\in[3,e^2]$.

11. 选 A. 由三视图可知，该几何体是由半个圆柱与半个圆锥组合而成，其中圆柱的底面半径为 2，高为 4，圆锥的底面半径和高均为 2，其体积为 $V=\frac{1}{2}\times4\pi\times4+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times4\pi\times2=\frac{28\pi}{3}$.

12. 选 D. $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象相邻两个对称中心之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，于是有 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，$\omega=2$，

所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，

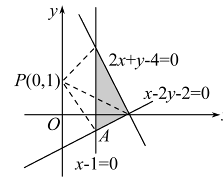
$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$单调递减. 因此结合各选项知，

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的一个单调递减区间为$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

第Ⅱ卷

二、填空题

13.【解析】作出不等式组表示的可行域如图中阴影部分所示，因为$\frac{y-1}{x}$表示可行域内的点与定点 $P(0,1)$连线的斜率. 由图知，



点 $P(0,1)$与点 $A\left(1,-\frac{1}{2}\right)$连线的斜率最小，所以

$$\left(\frac{y-1}{x}\right)_{\min}=k_{PA}=\frac{-\frac{1}{2}-1}{1-0}=-\frac{3}{2}.$$

答案：$-\frac{3}{2}$

14.【解析】由 $a_{n+1}=2S_n+1$ 可得 $a_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant2)$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，即 $a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$.

又 $a_2=2S_1+1=3$，所以 $a_2=3a_1$，故$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 3 的等比数列，所以 $a_n=3^{n-1}$.

答案：$a_n=3^{n-1}$

15.【解析】由题意可知输出结果为 $S=35$，

第 1 次循环，$S=11$，$k=9$，第 2 次循环，$S=20$，$k=8$，第 3 次循环，$S=28$，$k=7$，第 4 次循环，$S=35$，$k=6$，此时 S 满足输出结果，退出循环，所以判断框中的条件为：$k>6$ 或 $k\geqslant7$?

答案：$k>6$? 或 $k\geqslant7$?

16.【解析】在$\triangle ABD$ 中，

因为$\angle BAD=90°$，$\angle ABD=45°$，所以$\angle ADB=45°$，

所以 $AD=AB=80$ 米，所以 $BD=80\sqrt{2}$米，在$\triangle ABC$ 中

$\frac{BC}{\sin 30°}=\frac{AB}{\sin 45°}$，

所以 $BC=\frac{AB\sin 30°}{\sin 45°}=\frac{80\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=40\sqrt{2}$(米).

在$\triangle DBC$ 中，$DC^2=DB^2+BC^2-2DB\cdot BC\cos 60°$

$=(80\sqrt{2})^2+(40\sqrt{2})^2-2\times80\sqrt{2}\times40\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=9\ 600$，

所以 $DC=40\sqrt{6}$米，航模的速度 $v=\frac{40\sqrt{6}}{20}$

$=2\sqrt{6}$米/秒.

因此航模的速度为 $2\sqrt{6}$米/秒.

答案：$2\sqrt{6}$

三、解答题

17.【解析】(1)由前 3 项积为 27，得 $a_2=3$，设等比数列的公比为 q，

由 $2a_2$ 为 $3a_1$ 和 a_3 的等差中项，得 $3\cdot\frac{3}{q}+3q=4\times3$，由公比不为 1，解得：$q=3$，

所以 $a_n=3^{n-1}$.

(2)由 $b_n=b_{n-1}\cdot\log_3 a_{n+1}=b_{n-1}\cdot n$，

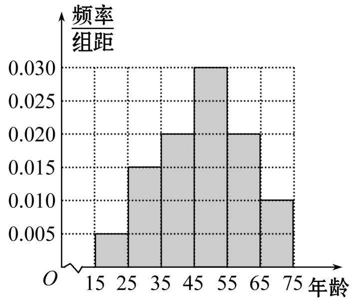
得 $b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1=n!$.

令 $c_n=\frac{b_n}{b_{n+2}}=\frac{n!}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，

则 $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$

18.【解析】(1)由题知被调查者一共有 100 人，
所以有 $5+15+20+n+20+10=100$，
所以 $n=30$.
所以被调查人员年龄各组的$\dfrac{频率}{组距}$为 0.005,0.015,
0.020,0.030,0.020,0.010. ………………………… 2 分
所以被调查人员年龄的频率分布直方图如图所示：

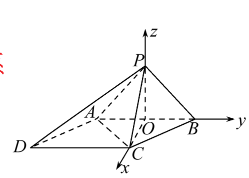


…………………………………………………………………… 4 分
(2)由(1)知，年龄在[45,55)的共有 30 人，其中赞成的有 18 人，不赞成的有 12 人.
由分层抽样赞成者应选 $10\times\dfrac{3}{5}=6$ 人， ………………… 6 分
不赞成有 4 人. 则 $\xi=0,1,2,3$. ………………………… 7 分
$P(\xi=0)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$， ………………………… 8 分
$P(\xi=1)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$， ………………………… 9 分
$P(\xi=2)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$， ………………………… 10 分
$P(\xi=3)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$， ………………………… 11 分
所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$

…………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)取 AB 中点 O，连接 AC,CO,PO，
因为四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，
所以 $AB=BC=2$.
因为 $\angle ABC=60°$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形.
所以 $CO\perp AB$，$OC=\sqrt{3}$.
因为 $PA\perp PB$，所以 $PO=\dfrac{1}{2}AB=1$.
因为 $PC=2$，所以 $OP^2+OC^2=PC^2$. 所以 $CO\perp PO$.
因为 $AB\cap PO=O$，所以 $CO\perp$平面 PAB.
因为 $CO\subset$平面 $ABCD$，所以平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$.
(2)因为 $PA=PB$，O 为 AB 的中点
由(1)知，平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，
所以 $PO\perp$平面 $ABCD$，
所以直线 OC,OB,OP 两两垂直.
以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，如图，



则 $O(0,0,0)$，
$A(0,-1,0)$，
$B(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(\sqrt{3},-2,0)$，$P(0,0,1)$
所以 $\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.
设平面 APC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，
由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y+z=0,\\ \sqrt{3}x-z=0,\end{cases}$
取 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，
设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$
取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{3})$，
所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\,|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，
由图可知二面角 $A\text{-}PC\text{-}D$ 为锐二面角.
所以二面角 $A\text{-}PC\text{-}D$ 的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

20.【解析】(1)因为 $\triangle MNF_2$ 的周长为 8，所以 $4a=8$，所以 $a=2$. 又因为$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，
所以椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{y^2}{4}+x^2=1$.
(2)将直线的方程 $y=kx+m$ 代入到椭圆方程$\dfrac{y^2}{4}+x^2=1$ 中，得 $(4+k^2)x^2+2kmx+m^2-4=0$.
由直线与椭圆仅有一个公共点，
知 $\Delta=4k^2m^2-4(4+k^2)(m^2-4)=0$，化简得 $m^2=4+k^2$.
设 $d_1=|F_1M'|=\dfrac{|-\sqrt{3}+m|}{\sqrt{k^2+1}}$，$d_2=|F_2N'|=\dfrac{|\sqrt{3}+m|}{\sqrt{k^2+1}}$，
所以 $d_1^2+d_2^2=\left(\dfrac{m-\sqrt{3}}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2+\left(\dfrac{m+\sqrt{3}}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2$
$=\dfrac{2(m^2+3)}{k^2+1}=\dfrac{2(k^2+7)}{k^2+1}$，
$d_1d_2=\dfrac{|-\sqrt{3}+m|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\dfrac{|\sqrt{3}+m|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|m^2-3|}{k^2+1}=1$，
所以 $|M'N'|=\sqrt{|F_1F_2|^2-(d_1-d_2)^2}$
$=\sqrt{12-(d_1^2+d_2^2-2d_1d_2)}=\sqrt{\dfrac{12k^2}{k^2+1}}$.
因为四边形 $F_1M'N'F_2$ 的面积
$S=\dfrac{1}{2}|M'N'|(d_1+d_2)$，
所以 $S^2=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{12k^2}{k^2+1}\times(d_1^2+d_2^2+2d_1d_2)$
$=\dfrac{3k^2(4k^2+16)}{(k^2+1)^2}$.
令 $k^2+1=t(t\geqslant 1)$，则
$S^2=\dfrac{3(t-1)[4(t-1)+16]}{t^2}=\dfrac{12(t-1)(t+3)}{t^2}$
$=\dfrac{12(t^2+2t-3)}{t^2}$
$=12+12\left[-3\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\right]$，
所以当$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{3}$时，$S^2$ 取得最大值为 16，故 $S_{\max}=4$，即四边形 $F_1M'N'F_2$ 面积的最大值为 4.

21.【解析】(1)$f'(x)=\dfrac{1}{x}+a$，$x\in(0,+\infty)$.
①当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；
②当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

(2)当 $a=1$ 时,$g(x)=\ln x+\frac{1}{2x}-m$,

由已知,得 $\ln x_1+\frac{1}{2x_1}=m,\ln x_2+\frac{1}{2x_2}=m$,

两式相减,得

$\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2x_1}-\frac{1}{2x_2}=0\Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{x_1-x_2}{2\ln\frac{x_1}{x_2}}$,

所以 $x_1=\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{2\ln\frac{x_1}{x_2}},x_2=\frac{1-\frac{x_2}{x_1}}{2\ln\frac{x_1}{x_2}}$,

所以 $x_1+x_2=\frac{\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}}{2\ln\frac{x_1}{x_2}}$,令 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$,

设 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$,

所以 $h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{t^2-2t+1}{t^2}>0$,

所以 $h(t)$在$(0,1)$上单调递增,

所以 $h(t)<h(1)=0$,即 $t-\frac{1}{t}<2\ln t$.

又因为 $\ln t<0$,

所以$\frac{t-\frac{1}{t}}{2\ln t}>1$,所以 $x_1+x_2>1$.

22.【解析】(1)由 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 可得曲线C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$,即$(x-1)^2+(y-2)^2=1$,

$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$消去参数$t$,可得 $y=\tan\alpha(x-1)$. 设 $k=\tan\alpha$,则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,

由题意,得圆心$(1,2)$到直线 l 的距离 $d_1=\frac{|k-2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=\pm\sqrt{3}$,

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y=\pm\sqrt{3}(x-1)$.

(2)因为 $\tan\alpha=2$,

所以直线 l 的方程为 $2x-y-2=0$,

原点到直线 l 的距离 $d_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

联立$\begin{cases}2x-y-2=0,\\(x-1)^2+(y-2)^2=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{8}{5},\\y=\frac{6}{5},\end{cases}$

所以$|AB|=\sqrt{\left(2-\frac{8}{5}\right)^2+\left(2-\frac{6}{5}\right)^2}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}$,所以 $S=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$.

23.【解析】(1)当 $x<0$ 时,$2x-1<0$,所以 $f(x)<4$ 可化为

$|2x+1|-2x<3$. ①

当 $x\leqslant-\frac{1}{2}$时,①化为$-2x-1-2x<3$,解得 $x>-1$,

此时$-1<x\leqslant-\frac{1}{2}$.

当$-\frac{1}{2}<x<0$ 时,①化为 $2x+1-2x<3$,解得 $x\in\mathbf{R}$,

此时$-\frac{1}{2}<x<0$.

综上,原不等式的解集是$\{x|-1<x<0\}$.

(2)因为 $f(x)=|2x-1|+|2x+1|$

$\geqslant|(2x-1)-(2x+1)|=2$,

所以 $f(x)$的值域为$[2,+\infty)$.

当 $a\geqslant0$ 时,因为$|x|\geqslant0$,所以 $g(x)$的值域为$(-\infty,|a-1|]$.

若 $M\cap N\neq\varnothing$,则$|a-1|\geqslant2$,解得 $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant3$. 从而 $a\geqslant3$.

当 $a<0$ 时,因为$|x|\geqslant0$,所以 $g(x)$的值域为$[|a-1|,+\infty)$,此时一定满足 $M\cap N\neq\varnothing$. 从而 $a<0$. 综上,a 的取值范围是$(-\infty,0)\cup[3,+\infty)$.