数学（理科）参考答案

一、选择题

1.B 2.D 3.C 4.A 5.B 6.D 7.A 8.C 9.A 10.D 11.D 12.C

二、填空题

13.35 14.-9 15.$-\frac{\pi}{6}$ 16.$-\frac{1}{2}$

三、解答题

17.解：(1) 由题意知 $2a\cos^2\frac{B}{2}=a+b\sin A$，则 $2a\cdot\frac{1+\cos B}{2}=a+b\sin A$，

化简，得 $a\cos B=b\sin A$，由正弦定理得 $\sin A\cos B=\sin B\sin A$.

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\tan B=1$.

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$.

因为 $c=12$，$S_{\triangle ABC}=36$，所以 $\frac{1}{2}a\times 12\times\sin\frac{\pi}{4}=36$，

解得 $a=6\sqrt{2}$. (6分)

(2) 由 (1) 知，$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=6\sqrt{2}$，故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

所以 $\angle A=\angle B=\frac{\pi}{4}$，$\angle C=\frac{\pi}{2}$.

在 $\triangle ACM$ 中，

$CM=\sqrt{AC^2+AM^2-2AC\cdot AM\cos\angle BAC}=2\sqrt{10}$，

则 $\cos\angle ACM=\frac{AC^2+CM^2-AM^2}{2AC\cdot CM}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，且 $AN\perp CM$，

从而 $\sin\angle ANC=\sin\angle ACM=\sqrt{1-\cos^2\angle ACM}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $AN=\frac{AC}{\sin\angle ANC}=3\sqrt{10}$. (12分)

18.(1) 证明：连接 BD，则由菱形的性质可得 $AC\perp BD$，结合三角形中位线的性质可知 $OE\parallel BD$，故 $OE\perp AC$.

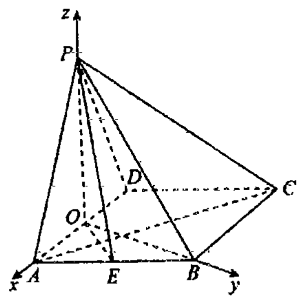
因为 $PO\perp$ 底面 $ABCD$，$AC\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $AC\perp OP$.

因为 $OP\cap OE=O$，所以 $AC\perp$ 平面 POE.

因为 $PE\subset$ 平面 POE，所以 $AC\perp PE$. (4分)

(2) 解：连接 OB，由题意结合菱形的性质易知 $OP\perp OA$，$OP\perp OB$，$OA\perp OB$.

以点 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，



则 $P(0,0,4)$，$B(0,3\sqrt{3},0)$，$O(0,0,0)$，$E\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$.

所以 $\overrightarrow{OP}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{OE}=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$.

设平面 POE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OP}=4z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}y=0.\end{cases}$

据此可得平面 POE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,0)$.

而 $\overrightarrow{PB}=(0,3\sqrt{3},-4)$，

设直线 PB 与平面 POE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{m}|}=\frac{3\sqrt{3}}{2\times\sqrt{43}}=\frac{3\sqrt{129}}{86}$. (9分)

(3) 解：存在满足题意的点 F，理由如下：

由题意可得 $D(-3,0,0)$，$C(-6,3\sqrt{3},0)$，$A(3,0,0)$，

假设满足题意的点 F 存在，

设 $F(x,y,z)$，$\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DC}(0<\lambda<1)$，

据此可得 $(x+3,y,z)=\lambda(-3,3\sqrt{3},0)$，

即 $\begin{cases}x=-3\lambda-3,\\ y=3\sqrt{3}\lambda,\\ z=0,\end{cases}$

从而点 F 的坐标为 $F(-3\lambda-3,3\sqrt{3}\lambda,0)$.

据此可得 $\overrightarrow{BF}=(-3\lambda-3,3\sqrt{3}\lambda-3\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{PA}=(3,0,-4)$，

结合题意有$\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{PA}|}=\frac{9\lambda+9}{5\times\sqrt{9(\lambda+1)^2+27(\lambda-1)^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$,解得$\lambda=\frac{1}{2}$.

故点F为CD中点时满足题意. （12分）

19.解:(1)设明年常规稻A的单价为ξ元/公斤,则ξ的分布列为

ξ	3.50	3.60	3.70
P	0.1	0.6	0.3

则$E(\xi)=3.50\times0.1+3.60\times0.6+3.70\times0.3=3.62$,

所以估计明年常规稻A的单价平均值为3.62元/公斤. （4分）

(2)杂交稻B的亩产平均值为$[(730+790+800)\times0.005+(740+780)\times0.01+(750+770)\times0.02+760\times0.025]\times10=762$. （6分）

依题意知杂交稻B的亩产超过765公斤的概率为$p=0.2+0.1+0.05\times2=0.4$,

则将来三年中至少有二年,杂交稻B的亩产超过765公斤的概率为$C_3^2\times0.4^2\times(1-0.4)+0.4^3=0.352$. （8分）

(3)因为散点图中各点大致分布在一条直线附近,所以可以判断杂交稻B的单价y与种植亩数x线性相关,

由题中提供的数据得$\hat{b}=\frac{-0.52}{0.65}=-0.8$,

由$\overline{y}=\hat{b}\,\overline{x}+\hat{a}$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=2.82+0.8\times1.60=4.10$,

所以线性回归方程为$\hat{y}=-0.8x+4.10$,

估计明年杂交稻B的单价$\hat{y}=-0.8\times2+4.10=2.50$(元/公斤);

估计明年杂交稻B的每亩平均收入为$762\times2.50=1\ 905$(元/亩),

估计明年常规稻A的每亩平均收入为$500\times E(\xi)=500\times3.62=1\ 810$(元/亩).

因为$1\ 905>1\ 810$,所以明年选择种植杂交稻B收入更高. （12分）

20.解:(1)已知$M(m,9)$到焦点F的距离为10,则点M到准线的距离为10.

因为抛物线的准线为$y=-\frac{p}{2}$,所以$9+\frac{p}{2}=10$,

解得$p=2$,所以抛物线的方程为$x^2=4y$. （4分）

(2)由已知可判断直线l的斜率存在,设斜率为k.

因为$F(0,1)$,所以$l:y=kx+1$.

设$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$,由$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y\end{cases}$

消去y,得$x^2-4kx-4=0$,

所以$x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-4$. （7分）

由于抛物线C也是函数$y=\frac{1}{4}x^2$的图象,且$y'=\frac{1}{2}x$,则$PA:y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$.

令$y=0$,解得$x=\frac{1}{2}x_1$,所以$P\left(\frac{1}{2}x_1,0\right)$,从而$|AP|=\frac{1}{4}\sqrt{x_1^2(4+x_1^2)}$.

同理可得,$|BQ|=\frac{1}{4}\sqrt{x_2^2(4+x_2^2)}$,

所以$|AP|\cdot|BQ|=\frac{1}{16}\sqrt{(x_1x_2)^2(4+x_1^2)(4+x_2^2)}=\frac{1}{16}\sqrt{(x_1x_2)^2[16+4(x_1^2+x_2^2)+(x_1x_2)^2]}=2\sqrt{1+k^2}$.

因为$k^2\geqslant0$,所以$|AP|\cdot|BQ|$的取值范围为$[2,+\infty)$. （12分）

21.(1)解:当$a=0$时,$f(x)=x^2\ln x$,$f'(x)=x(2\ln x+1)$,令$f'(x)=0$,得$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

$f(x)$的单调性如下表:

x	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$-\frac{1}{2e}$	单调递增

易知$f(x)_{\min}=-\frac{1}{2e}$. （3分）

(2)(ⅰ)解:$f'(x)=\frac{x^2(2\ln x+1)+a}{x}$.

令$g(x)=x^2(2\ln x+1)+a$,则$g'(x)=4x(\ln x+1)$.

令$g'(x)=0$,得$x=\frac{1}{e}$.

$g(x)$的单调性如下表:

x	$\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	单调递减	$a-\frac{1}{e^2}$	单调递增

$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上有两个极值点,即$g(x)$在区间$\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上有两个零点,

结合$g(x)$的单调性可知,$g\left(\frac{1}{e^2}\right)>0$且$g\left(\frac{1}{e}\right)<0$,

即 $a-\frac{3}{e^4}>0$ 且 $a-\frac{1}{e^2}<0$.

所以 $\frac{3}{e^4}<a<\frac{1}{e^2}$,即 a 的取值范围是 $\left(\frac{3}{e^4},\frac{1}{e^2}\right)$. (7 分)

(ⅱ)证明:由(ⅰ)知 $g(x_2)=0$,则 $a=-x_2^2(2\ln x_2+1)$,所以 $f(x_2)=(x_2^2+a)\ln x_2=-2(x_2\ln x_2)^2$.

又 $g\left(\frac{1}{e^2}\right)>0,g\left(\frac{1}{e}\right)<0,g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=a>0$,结合 $g(x)$ 的单调性可知,$x_2\in\left(\frac{1}{e},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

令 $\varphi(x)=-2(x\ln x)^2$,则 $\varphi'(x)=-4x\ln x(\ln x+1)$.当 $x\in\left(\frac{1}{e},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 时,$\ln x<0$,$\ln x+1>0$,$\varphi'(x)>0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上单调递增,而 $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e^2}$,$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$,

因此 $-\frac{2}{e^2}<f(x_2)<-\frac{1}{2e}$. (12 分)

22.解:(1)将 $\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \rho\cos\theta=x\end{cases}$ 代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta=3$ 中得 $x^2+y^2-2x=3$,

即 $(x-1)^2+y^2=4$,曲线 C 是一个以 $(1,0)$ 为圆心,2 为半径的圆. (4 分)

(2)由直线 l 的参数方程,知其过定点 $P(3,3)$,由于直线 l 与曲线 C 相交,由图象知其倾斜角 α 为锐角.

联立 $\begin{cases}x=3+t\cos\alpha,\\ y=3+t\sin\alpha\end{cases}$ 与 $(x-1)^2+y^2=4$,整理得到关于 t 的二次方程 $t^2+(4\cos\alpha+6\sin\alpha)t+9=0$.

由 $\Delta>0$ 知 $(4\cos\alpha+6\sin\alpha)^2-36>0$,则 $4\cos\alpha+6\sin\alpha>6$ 或 $4\cos\alpha+6\sin\alpha<-6$(舍).

又由于点 A,B 均在点 P 的下方,由参数 t 的几何意义,知

$|PA|+|PB|=-(t_1+t_2)=4\cos\alpha+6\sin\alpha=2\sqrt{13}\sin(\alpha+\varphi)\in(6,2\sqrt{13}]\left(\text{其中}\tan\varphi=\frac{2}{3}\right)$.

所以 $|PA|+|PB|$ 的最大值为 $2\sqrt{13}$. (10 分)

23.解:(1)依题意,得 $|x-3|+2|x|<5$.

当 $x<0$ 时,$3-x-2x<5$,即 $x>-\frac{2}{3}$,故 $-\frac{2}{3}<x<0$;

当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时,即 $3-x+2x<5$,即 $x<2$,故 $0\leqslant x<2$;

当 $x>3$ 时,$x-3+2x<5$,即 $x<\frac{8}{3}$,故无解.

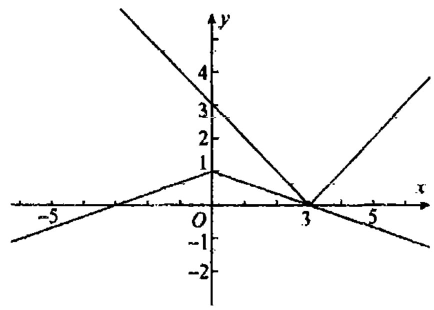
综上所述,不等式 $f(x)<5$ 的解集为 $\left(-\frac{2}{3},2\right)$.

(5 分)

(2)依题意,$|x-3|-m|x|\geqslant 1$,故 $|x-3|\geqslant m|x|+1$(*),

显然 $m\geqslant 0$ 时,(*)式在 $\mathbf{R}$ 上不恒成立,

当 $m<0$ 时,在同一直角坐标系中分别作出 $y=|x-3|$,$y=m|x|+1$ 的图象如下图所示.



观察可知,$m\leqslant-\frac{1}{3}$,即实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$. (10 分)