

兰州一中 2019 届高三模拟考试试题

数学 (理科)

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 满分 150 分.

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. i 是虚数单位, 则复数 $\frac{6i}{1-i}$ 的虚部为

- A. 3 B. -3 C. $3i$ D. $-4i$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 + x - 2 = 0\}$, $B = \{x | x \geq a\}$, 若 $A \cap B = \{1\}$, 则 a 的取值范围是

- A. $[-2, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-2, 1]$

3. 据有关文献记载: 我国古代一座 9 层塔共挂了 126 盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数比上一层灯数都多 n (n 为常数) 盏, 底层的灯数是顶层的 13 倍, 则塔的底层共有灯

- A. 2 盏 B. 3 盏 C. 26 盏 D. 27 盏

4. 已知焦点在 x 轴上的双曲线焦距为 $2\sqrt{3}$, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{2}$, 则双曲线的方程为

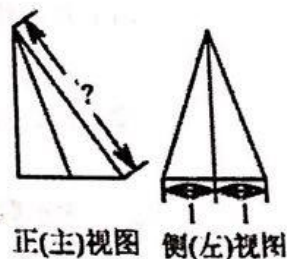
- A. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ C. $y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$ D. $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$

5. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x-3y+3 \geq 0 \\ x-2y-1 \leq 0 \end{cases}$, 则函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 一个底面为正方形的四棱锥, 其三视图如图所示, 若这个四棱锥的体积为 2, 则此四棱锥最长的侧棱长为

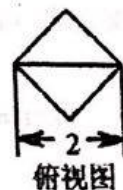
- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{11}$ C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{10}$



7. 若随机变量 X 服从分布 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $2P(X \geq 3) = P(1 \leq X \leq 2)$, 则

$P(X < 3) =$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{2}{3}$



8. 有编号依次为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 名学生参加数学竞赛选拔赛, 今有甲、乙、丙、丁四位老师在猜谁将得第一名, 甲猜不是 3 号就是 5 号; 乙猜 6 号不可能; 丙猜 2 号, 3 号, 4 号都不可能; 丁猜是 1 号, 2 号, 4 号中的某一个. 若以上四位老师中只有一位老师猜对, 则猜对者是

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

9. 点 A, B, C, D 在同一球面上, $AB = BC = 2, AC = 2\sqrt{2}$, 若四面体 $ABCD$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$, 则该球的表面积为

- A. 9π B. 8π C. $\frac{16}{3}\pi$ D. 12π

10. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - (2\cos^2 x - 1)$ 将 $f(x)$ 图像的横坐标伸长为原来的 2 倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后得到函数 $g(x)$, 在区间 $[0, \pi]$ 上随机取一个数 x , 则 $g(x) \geq 1$ 的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

11. 已知函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x+4) - f(x) = 2f(2)$, 若 $y = f(x-1)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 则 $f(2018) =$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

12. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > 0, b_2 > 0)$ 有相同的

焦点 F_1, F_2 , 若点 P 是 C_1 与 C_2 在第一象限内的交点, 且 $|F_1F_2| = 2|PF_2|$, 设 C_1 与 C_2 的离

心率分别为 e_1, e_2 , 则 $e_2 - e_1$ 的取值范围是

- A. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 式子 $(1 + 3\sqrt{x})^n$ 展开式中, 各项系数和为 16, 则 $\int_{-1}^n x dx =$ _____.

14. 已知 $\vec{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 夹角的余弦值为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都为正数, 前 n 项和为 S_n , 若 $\{\log_2 a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, 且

$S_5 = 62$, 则 $a_2 =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x - 2ax}{x}$, 若有且仅有一个整数 k , 使得 $f(k) > 1$, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{a-c}.$$

(1) 求 B ;

(2) 若 $b = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值.

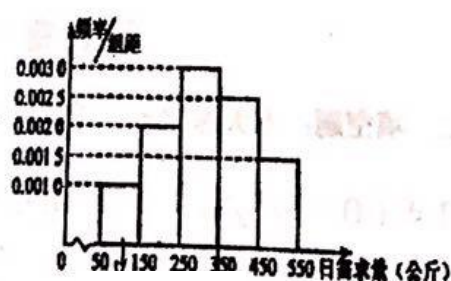
18. (本小题满分 12 分) 某水产品经销商销售某种鲜鱼, (售价为每公斤 20 元), 成本为每公斤 15 元. 销售宗旨是当天进货当天销售. 如果当天卖不出去, 未售出的全部降价处理完, 平均每公斤损失 3 元. 根据以往的销售情况, 按 $[50, 150)$, $[150, 250)$, $[250, 350)$, $[350, 450)$, $[450, 550]$ 进行分组, 得到如图所示的频率分布直方图.

(1) 求未来连续三天内, 该经销商有连续两天该种鲜鱼的日销售量不低于 350 公斤, 而另一天日销售量低于 350 公斤的概率;

(2) 在频率分布直方图的需求量分组中, 以各组区间的中点值代表该组的各个值.

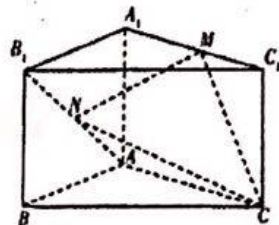
(i) 求日需求量 X 的分布列;

(ii) 该经销商计划每日进货 300 公斤或 400 公斤, 以每日利润 Y 的数学期望值为决策依据, 他应该选择每日进货 300 公斤还是 400 公斤?



19. (本小题满分 12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2$,

点 M 为 A_1C_1 的中点, 点 N 为 AB_1 上一动点.



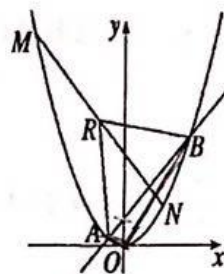
(1) 是否存在一点 N , 使得线段 $MN \parallel$ 平面 BB_1C_1C ? 若存在,

指出点 N 的位置, 若不存在, 请说明理由.

(2) 若点 N 为 AB_1 的中点且 $CM \perp MN$, 求二面角 $M-CN-A$ 的正弦值.

20. (本小题满分 12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, 斜率为 $k (k \neq 0)$

的直线 l 经过 C 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 满足 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{3}{4}$.



(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 已知线段 AB 的垂直平分线与抛物线 C 交于 M, N 两点, R 为线段 MN

的中点, 记点 R 到直线 AB 的距离为 d , 若 $\frac{d}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 k 的值.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - ax) \ln x - \frac{1}{4}x^2 + ax$ (常数 $a > 0$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 求证: $f'(x) < 4e^{x-3} - a \ln x$.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l: \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 M 的极坐标为 $(3, \frac{\pi}{2})$, 直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B , 求 $|MA| + |MB|$ 的值

23. (本小题满分 10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x-1| + |x-m|$

(1) 当 $m = 3$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 5$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) \geq 2m-1$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.