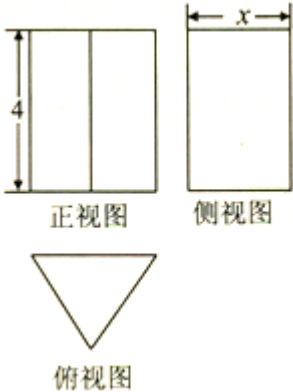


# 南昌八中 2019 届高三 3 月模拟测试卷（文科）试题

## 一、选择题（本大题共 12 小题，共 60.0 分）

1. 设全集  $U=\{a, b, c, d\}$ ,  $A=\{a, c\}$ ,  $B=\{b\}$ , 则  $(C_U B) \cap A =$  ( )  
 A.  $\emptyset$                       B.  $\{a, c\}$                       C.  $\{a\}$                       D.  $\{c\}$
2. 若复数  $z$  满足  $z=1-i+\frac{1}{1-i}$ , 则  $z$  的虚部为 ( )  
 A.  $-\frac{1}{2}i$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}i$                       D.  $\frac{1}{2}$
3. 命题 “ $\forall x \in (0, +\infty)$ ,  $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 > 0$ ” 的否定是 ( )  
 A.  $\exists x_0 \notin (0, +\infty)$ ,  $\frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + 1 \leq 0$   
 B.  $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ ,  $\frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + 1 \leq 0$   
 C.  $\forall x_0 \notin (0, +\infty)$ ,  $\frac{1}{3}x_0^3 - x + 1 \leq 0$   
 D.  $\forall x_0 \in (0, +\infty)$ ,  $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 \leq 0$
4.  $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot \cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ \tan 70^\circ - 2 \cos 40^\circ =$  ( )  
 A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C. 2                      D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 设  $l$  为直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面. 下列命题中正确的是 ( )  
 A. 若  $l \parallel \alpha$ ,  $l \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$                       B. 若  $l \perp \alpha$ ,  $l \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
 C. 若  $l \perp \alpha$ ,  $l \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$                       D. 若  $\alpha \perp \beta$ ,  $l \parallel \alpha$ , 则  $l \perp \beta$
6. 一个总体分为  $A, B, C$  三层, 用分层抽样方法从总体中抽取容量为 50 的样本, 已知  $B$  层中每个个体被抽到的概率都为  $\frac{1}{12}$ , 则总体容量为 ( )  
 A. 150                      B. 200                      C. 500                      D. 600
7. 一个正三棱柱的三视图如图所示, 若该三棱柱的外接球的表面积为  $32\pi$ , 则侧视图中的  $x$  的值为 ( )  

 A. 6  
 B. 4  
 C. 3  
 D. 2
8. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右顶点为  $A$ , 右焦点为  $F(c, 0)$ , 弦  $PQ$  的过  $F$  且垂直于  $x$  轴, 过点  $P, Q$  分别作直线  $AP, AQ$  的垂线, 两垂线交于点  $B$ , 若  $B$  到直线  $PQ$  的距离小于  $2(a+c)$ , 则该双曲线离心率的取值范围是 ( )  
 A.  $(1, \sqrt{3})$                       B.  $(\sqrt{3}, +\infty)$                       C.  $(0, \sqrt{3})$                       D.  $(2, \sqrt{3})$

9. 若实数  $x, y$  满足  $|x| \leq y \leq 1$ , 则  $x^2 + y^2 + 2x$  的最小值为 ( )
- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
10. 若  $f(x) = \lg(x^2 - 2ax + 1 + a)$  在区间  $(-\infty, 1]$  上单调递减, 则  $a$  的取值范围为 ( )
- A.  $[1, 2)$                       B.  $[1, 2]$                       C.  $[1, +\infty)$                       D.  $[2, +\infty)$
11. 设  $A, B$  在圆  $x^2 + y^2 = 1$  上运动, 且  $|AB| = \sqrt{3}$ , 点  $P$  在直线  $3x + 4y - 12 = 0$  上运动, 则  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$  的最小值为 ( )
- A. 3                      B. 4                      C.  $\frac{17}{5}$                       D.  $\frac{19}{5}$
12. 函数  $f(\alpha) = t \sin \alpha + \cos \alpha$  的最大值为  $g(t)$ , 则  $g(t)$  的最小值为 ( )
- A. 1                      B. 0                      C.  $|t| + 1$                       D.  $\sqrt{t^2 + 1}$

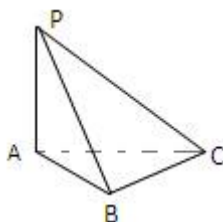
二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 定义  $\max\{x, y\} = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$ , 设  $f(x) = \max\{a^x - a, -\log_a x\}$  ( $x \in \mathbb{R}^+, a > 0, a \neq 1$ ). 若

$a = \frac{1}{4}$ , 则  $f(2) + f(\frac{1}{2}) =$  \_\_\_\_\_; 若  $a > 1$ , 则不等式  $f(x) \geq 2$  的解集是 \_\_\_\_\_.

14. 形如  $\frac{2}{n}$  ( $n = 5, 7, 9, 11, \dots$ ) 的分数的分解:  $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ ,  $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ ,  $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$ ,  
按此规律,  $\frac{2}{n} =$  \_\_\_\_\_ ( $n = 5, 7, 9, 11, \dots$ ).

15. 如图,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$  且  $PA = AC = BC = a$ , 则异面直线  $PB$  与  $AC$  所成角的余弦值等于 \_\_\_\_\_.



16. 已知抛物线方程为  $y^2 = 2x$ , 则抛物线上的点  $P(\frac{3}{2}, y_0)$  到焦点  $F$  的距离为 \_\_\_\_\_.

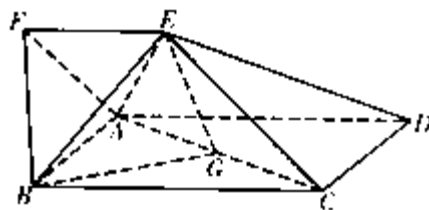
三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 70.0 分)

17. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ , 且  $\{a_n a_{n+1}\}$  是以 3 为公比的等比数列.

- (1) 求  $a_3, a_4$  的值;  
(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式和前  $2n$  项和.

18. 如图, 四边形  $ABCD$  为矩形, 四边形  $ADEF$  为梯形,  $AD \parallel FE$ ,  $\angle AFE = 60^\circ$ ,  $\angle AED = 90^\circ$ ,  
且平面  $ABCD \perp$  平面  $ADEF$ ,  $AF = FE = AB = \frac{1}{2}AD = 2$ , 点  $G$  为  $AC$  的中点.

- (I) 求证: 平面  $BAE \perp$  平面  $DCE$ ;  
(II) 求三棱锥  $B-AEG$  的体积.



19. 已知点  $A, B$  的坐标分别为  $(-2, 0), (2, 0)$ . 直线  $AP, BP$  相交于点  $P$ , 且它们的斜率之积是  $-\frac{1}{4}$ , 记动点  $P$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的方程;

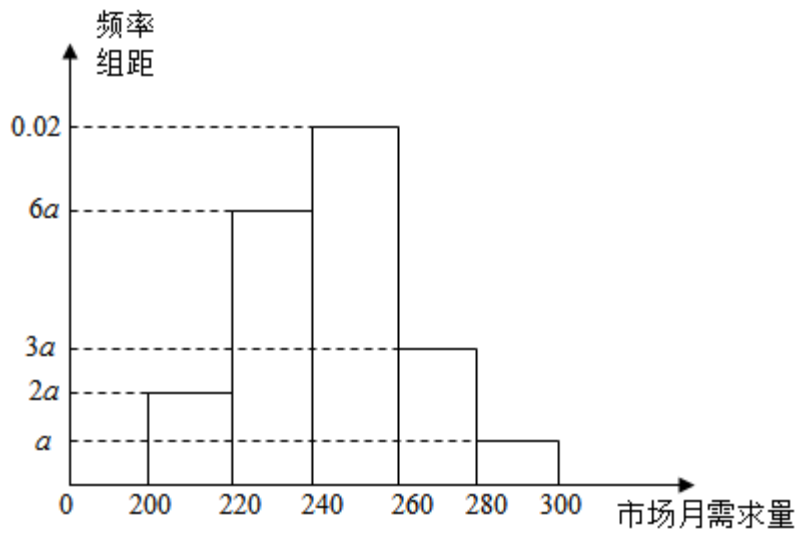
(2) 设  $Q$  是曲线  $C$  上的动点, 直线  $AQ, BQ$  分别交直线  $l: x=4$  于点  $M, N$ , 线段  $MN$  的中点为  $D$ , 求直线  $QB$  与直线  $BD$  的斜率之积的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 记直线  $BM$  与  $AN$  的交点为  $T$ , 试探究点  $T$  与曲线  $C$  的位置关系, 并说明理由.

20. 某企业生产的某种产品, 每售出 1 件利润为 2000 元, 未售出的产品每件亏损 500 元. 根据统计数据, 该产品的市场月需求量 (单位: 件) 的频率分布直方图如图所示.

(1) 求图中  $a$  的值, 并估计该产品的市场月需求量的中位数;

(2) 若该产品的月产量为 260 件, 以  $x$  (单位: 件,  $200 \leq x \leq 300$ ) 表示该产品的市场月需求量, 估计该企业的月利润  $y$  不小于 47 万的概率.



21. 已知函数  $f(x) = x \ln x - ax^2 + (2a-1)x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . 令  $g(x) = f'(x)$ , 求  $g(x)$  的单调区间.

22. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$  ( $\varphi$  为参数). 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系,  $A, B$  为  $C$  上两点, 且  $OA \perp OB$ , 设射线  $OA: \theta = \alpha$ , 其中  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

- (1) 求曲线  $C$  的极坐标方程;
- (2) 求  $|OA| \cdot |OB|$  的最小值.

23. 已知函数  $f(x) = |3x-1| - |2x+1| + a$ .

- (1) 求不等式  $f(x) > a$  的解集;
- (2) 若恰好存在 4 个不同的整数  $n$ , 使得  $f(n) < 0$ , 求  $a$  的取值范围.

