

南昌八中 2019 届高三 3 月模拟测试卷（文科）试题

一、选择题（本大题共 12 小题，共 60.0 分）

1. 设全集 $U=\{a, b, c, d\}$, $A=\{a, c\}$, $B=\{b\}$, 则 $(C_U B) \cap A =$ ()
 A. \emptyset B. $\{a, c\}$ C. $\{a\}$ D. $\{c\}$
2. 若复数 z 满足 $z=1-i+\frac{1}{1-i}$, 则 z 的虚部为 ()
 A. $-\frac{1}{2}i$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}i$ D. $\frac{1}{2}$
3. 命题 “ $\forall x \in (0, +\infty)$, $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 > 0$ ” 的否定是 ()
 A. $\exists x_0 \notin (0, +\infty)$, $\frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + 1 \leq 0$
 B. $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, $\frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + 1 \leq 0$
 C. $\forall x_0 \notin (0, +\infty)$, $\frac{1}{3}x_0^3 - x + 1 \leq 0$
 D. $\forall x_0 \in (0, +\infty)$, $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 \leq 0$
4. $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot \cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ \tan 70^\circ - 2 \cos 40^\circ =$ ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 设 l 为直线, α, β 是两个不同的平面. 下列命题中正确的是 ()
 A. 若 $l \parallel \alpha, l \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $l \perp \alpha, l \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 C. 若 $l \perp \alpha, l \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta, l \parallel \alpha$, 则 $l \perp \beta$
6. 一个总体分为 A, B, C 三层, 用分层抽样方法从总体中抽取容量为 50 的样本, 已知 B 层中每个个体被抽到的概率都为 $\frac{1}{12}$, 则总体容量为 ()
 A. 150 B. 200 C. 500 D. 600
7. 一个正三棱柱的三视图如图所示, 若该三棱柱的外接球的表面积为 32π , 则侧视图中的 x 的值为 ()
 A. 6
 B. 4
 C. 3
 D. 2

正视图 侧视图

俯视图
8. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A , 右焦点为 $F(c, 0)$, 弦 PQ 的过 F 且垂直于 x 轴, 过点 P, Q 分别作直线 AP, AQ 的垂线, 两垂线交于点 B , 若 B 到直线 PQ 的距离小于 $2(a+c)$, 则该双曲线离心率的取值范围是 ()
 A. $(1, \sqrt{3})$ B. $(\sqrt{3}, +\infty)$ C. $(0, \sqrt{3})$ D. $(2, \sqrt{3})$

9. 若实数 x, y 满足 $|x| \leq y \leq 1$, 则 $x^2 + y^2 + 2x$ 的最小值为 ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
10. 若 $f(x) = \lg(x^2 - 2ax + 1 + a)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 则 a 的取值范围为 ()
- A. $[1, 2)$ B. $[1, 2]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$
11. 设 A, B 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动, 且 $|AB| = \sqrt{3}$, 点 P 在直线 $3x + 4y - 12 = 0$ 上运动, 则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 的最小值为 ()
- A. 3 B. 4 C. $\frac{17}{5}$ D. $\frac{19}{5}$
12. 函数 $f(\alpha) = t \sin \alpha + \cos \alpha$ 的最大值为 $g(t)$, 则 $g(t)$ 的最小值为 ()
- A. 1 B. 0 C. $|t+1|$ D. $\sqrt{t^2 + 1}$

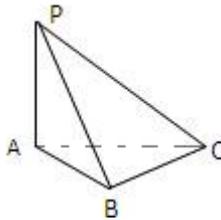
二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 定义 $\max\{x, y\} = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$, 设 $f(x) = \max\{a^x - a, -\log_a x\}$ ($x \in \mathbb{R}^+, a > 0, a \neq 1$). 若

$a = \frac{1}{4}$, 则 $f(2) + f(\frac{1}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$; 若 $a > 1$, 则不等式 $f(x) \geq 2$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 形如 $\frac{2}{n}$ ($n = 5, 7, 9, 11, \dots$) 的分数的分解: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$,
按此规律, $\frac{2}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($n = 5, 7, 9, 11, \dots$).

15. 如图, $PA \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$ 且 $PA = AC = BC = a$, 则异面直线 PB 与 AC 所成角的余弦值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.



16. 已知抛物线方程为 $y^2 = 2x$, 则抛物线上的点 $P(\frac{3}{2}, y_0)$ 到焦点 F 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

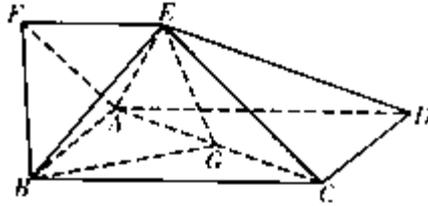
三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 70.0 分)

17. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, 且 $\{a_n a_{n+1}\}$ 是以 3 为公比的等比数列.

- (1) 求 a_3, a_4 的值;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式和前 $2n$ 项和.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 四边形 $ADEF$ 为梯形, $AD \parallel FE$, $\angle AFE = 60^\circ$, $\angle AED = 90^\circ$,
且平面 $ABCD \perp$ 平面 $ADEF$, $AF = FE = AB = \frac{1}{2}AD = 2$, 点 G 为 AC 的中点.

- (I) 求证: 平面 $BAE \perp$ 平面 DCE ;
(II) 求三棱锥 $B-AEG$ 的体积.



19. 已知点 A, B 的坐标分别为 $(-2, 0), (2, 0)$. 直线 AP, BP 相交于点 P , 且它们的斜率之积是 $-\frac{1}{4}$, 记动点 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

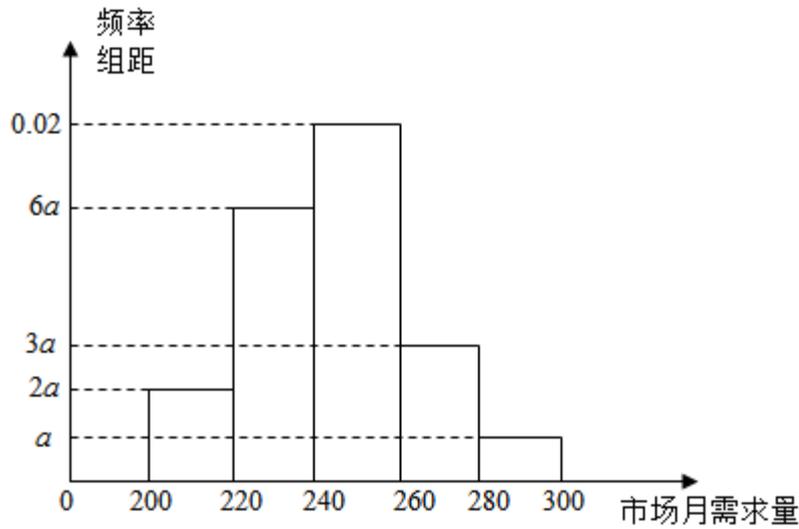
(2) 设 Q 是曲线 C 上的动点, 直线 AQ, BQ 分别交直线 $l: x=4$ 于点 M, N , 线段 MN 的中点为 D , 求直线 QB 与直线 BD 的斜率之积的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 记直线 BM 与 AN 的交点为 T , 试探究点 T 与曲线 C 的位置关系, 并说明理由.

20. 某企业生产的某种产品, 每售出 1 件利润为 2000 元, 未售出的产品每件亏损 500 元. 根据统计数据, 该产品的市场月需求量 (单位: 件) 的频率分布直方图如图所示.

(1) 求图中 a 的值, 并估计该产品的市场月需求量的中位数;

(2) 若该产品的月产量为 260 件, 以 x (单位: 件, $200 \leq x \leq 300$) 表示该产品的市场月需求量, 估计该企业的月利润 y 不小于 47 万的概率.



21. 已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 + (2a-1)x$, $a \in \mathbb{R}$. 令 $g(x) = f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, A, B 为 C 上两点, 且 $OA \perp OB$, 设射线 $OA: \theta = \alpha$, 其中 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

- (1) 求曲线 C 的极坐标方程;
- (2) 求 $|OA| \cdot |OB|$ 的最小值.

23. 已知函数 $f(x) = |3x-1| - |2x+1| + a$.

- (1) 求不等式 $f(x) > a$ 的解集;
- (2) 若恰好存在 4 个不同的整数 n , 使得 $f(n) < 0$, 求 a 的取值范围.

