

揭阳市 2019 年高考一模

数学 (理科)

本试卷共 23 题, 共 150 分, 共 4 页, 考试结束后将本试卷和答题卡一并收回.

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚.
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚.
3. 请按照题目的顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在草稿纸、试卷上答题无效.
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
5. 保持卡面清洁, 不要折叠、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 < 0\}$, $B = (-2, 2)$, 则 $C_A B =$
A. $(-3, -2)$ B. $(-3, -2]$ C. $(2, 3)$ D. $[2, 3)$
2. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -1)$, $\vec{c} = (1, \lambda)$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{c}$, 则 λ 的值为
A. -3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3
3. 已知 \bar{z} 是复数 z 的共轭复数, $(z+1)(\bar{z}-1)$ 是纯虚数, 则 $|z| =$
A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$
4. 若 $\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ 的值为
A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

5. 某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人, 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如右茎叶图: 则下列结论中表述不正确的是

第一种生产方式	第二种生产方式
8	6 5 5 6 8 9
9 7 6 2	7 0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8 1 4 4 5
2 1 1 0 0	9 0

- A. 第一种生产方式的工人中, 有 75% 的工人完成生产任务所需要的时间至少 80 分钟



B. 第二种生产方式比第一种生产方式效率更高

C. 这 40 名工人完成任务所需时间的中位数为 80

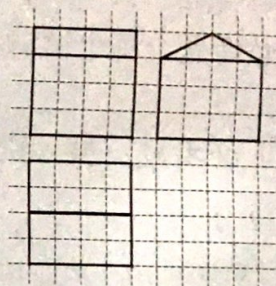
D. 无论哪种生产方式的工人完成生产任务平均所需要的时间都是 80 分钟.

6. 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减, 且为偶函数. 若 $f(2) = -1$, 则满足 $f(x-3) \geq -1$ 的 x 的取值范围是

A. $[1, 5]$ B. $[1, 3]$ C. $[3, 5]$ D. $[-2, 2]$

7. 如图, 网格纸上虚线小正方形的边长为 1, 实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为

A. $\frac{64}{3}$ B. 52 C. $53\frac{1}{3}$ D. 56



8. 某班星期一上午安排 5 节课, 若数学 2 节, 语文、物理、化学各 1 节, 且物理、化学不相邻, 2 节数学相邻, 则星期一上午不同课程安排种数为

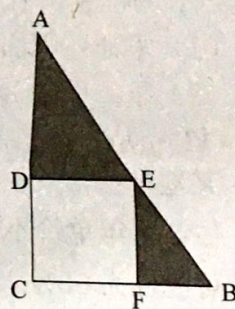
A. 6 B. 12 C. 24 D. 48

9. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 两焦点且与 x 轴垂直的直线与双曲线的四个交点组成一个正方形, 则该双曲线的离心率为

A. $\sqrt{5} - 1$ B. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

10. 右图为中国古代刘徽的《九章算术注》中研究“勾股容方”问题的图形, 图中 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 四边形 $DEFC$ 为它的内接正方形, 记正方形为区域 I, 图中阴影部分为区域 II, 在 $\triangle ABC$ 上任取一点, 此点取自区域 I、II 的概率分别记为 p_1 、 p_2 , 则

A. $p_1 = p_2$ B. $p_1 < p_2$ C. $p_1 \leq p_2$ D. $p_1 \geq p_2$



11. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $\sin \angle ABC = 2 \sin A$, 延长 AB 到 D 使得 $BD = AB$, 连结 CD , 则 CD 的长为

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ D. $3\sqrt{6}$

12. 已知函数 $f(x) = \cos \pi x$, $g(x) = e^{ax} - a + \frac{1}{2} (a \neq 0)$, 若 $\exists x_1, x_2 \in [0, 1]$, 使得

$f(x_1) = g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是

A. $[-\frac{1}{2}, 0)$ B. $[\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $[-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 命题“对 $\forall x \in [-1, 1], x^2 + 3x - 1 > 0$ ”的否定是 _____;

14. 在曲线 $f(x) = \sin x - \cos x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的所有切线中, 斜率为 1 的切线方程为 _____.

15. 已知圆锥的顶点为 S , 底面圆周上的两点 A 、 B 满足 $\triangle SAB$ 为等边三角形, 且面积为 $4\sqrt{3}$,



又知圆锥轴截面的面积为 8, 则圆锥的表面积为_____.

16. 已知点 P 在直线 $x+2y-1=0$ 上, 点 Q 在直线 $x+2y+3=0$ 上, $M(x_0, y_0)$ 为 PQ 的中点,

且 $y_0 > 2x_0 + 1$, 则 $\frac{y_0}{x_0}$ 的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 题 ~ 第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22 题 ~ 第 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3^n \cdot p + m$, (其中 p, m 为常数), 又 $a_1 = a_2 = 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

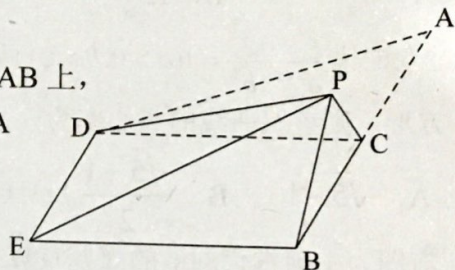
(2) 设 $b_n = \log_3 a_n$, 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

如图, 在四边形 ABED 中, $AB \parallel DE$, $AB \perp BE$, 点 C 在 AB 上, 且 $AB \perp CD$, $AC=BC=CD=2$, 现将 $\triangle ACD$ 沿 CD 折起, 使点 A 到达点 P 的位置, 且 PE 与平面 PBC 所成的角为 45° .

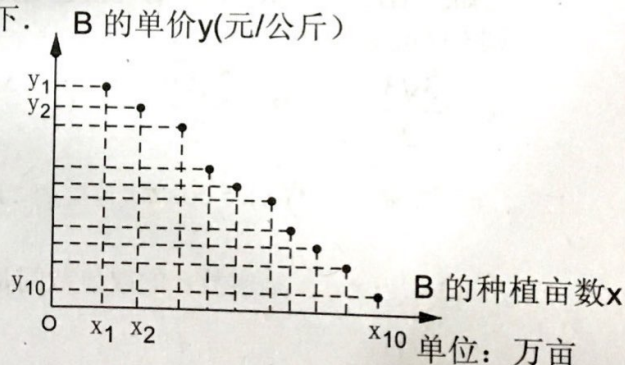
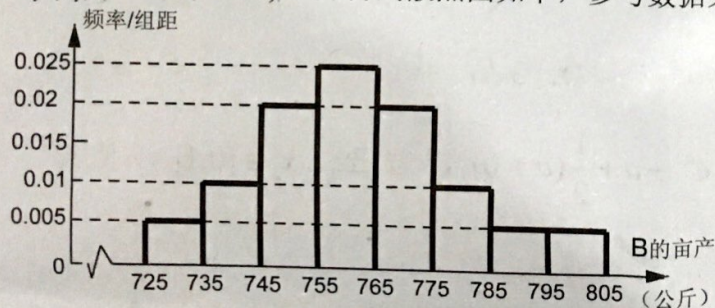
(1) 求证: 平面 PBC \perp 平面 DEBC;

(2) 求二面角 D-PE-B 的余弦值.



19. (12 分)

某地种植常规稻 A 和杂交稻 B, 常规稻 A 的亩产稳定为 500 公斤, 今年单价为 3.50 元 / 公斤, 估计明年单价不变的可能性为 10%, 变为 3.60 元 / 公斤的可能性为 60%, 变为 3.70 元 / 公斤的可能性为 30%. 统计杂交稻 B 的亩产数据, 得到亩产的频率分布直方图如下; 统计近 10 年来杂交稻 B 的单价 (单位: 元/公斤) 与种植亩数 (单位: 万亩) 的关系, 得到的 10 组数据记为 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 10)$, 并得到散点图如下, 参考数据见下.



(1) 估计明年常规稻 A 的单价平均值;

(2) 在频率分布直方图中, 各组的取值按中间值来计算, 求杂交稻 B 的亩产平均值; 以频率作为概率, 预计将来三年中至少有二年, 杂交稻 B 的亩产超过 765 公斤的概率;

(3) 判断杂交稻 B 的单价 y (单位: 元/公斤) 与种植亩数 x (单位: 万亩) 是否线性相关? 若相关, 试根据以下的参考数据求出 y 关于 x 的线性回归方程; 调查得知明年此地杂交稻 B 的种植亩数预计为 2 万亩. 若在常规稻 A 和杂交稻 B 中选择, 明年种植哪种水稻收入更高?



统计参考数据: $\bar{x} = 1.60$, $\bar{y} = 2.82$, $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -0.52$, $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 0.65$,

附: 线性回归方程 $\hat{y} = bx + a$, $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

20. (12 分)

已知点 $P(\frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 椭圆 C 的焦距为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 斜率为定值 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且满足 $|OA|^2 + |OB|^2$ 的值为常数, (其中 O 为坐标原点)

(i) 求 k 的值以及这个常数;

(ii) 写出一般性结论 (不用证明): 斜率为定值 k 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 A, B 两点, 且满足 $|OA|^2 + |OB|^2$ 的值为常数, 则 k 的值以及这个常数是多少?

21. (12 分)

设函数 $f(x) = ax - \ln x + \frac{1}{x} + b (a, b \in \mathbb{R})$,

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 + x_2 + 2 > 2ax_1x_2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

以原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = a^2 (a \in \mathbb{R}, a \text{ 为常数})$, 过点 $P(2, 1)$ 、倾斜角为 30° 的直线 l 的参数方程满足

$x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t$, (t 为参数).

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的参数方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点 (点 P 在 A, B 之间), 且 $|PA| \cdot |PB| = 2$, 求 a 和 $||PA| - |PB||$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x+1| - |x-1|$,

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若 $x \in [-2, 1]$ 时, $f(x) \leq 3x + a$, 求实数 a 的取值范围.

