数学（文科）参考答案及评分标准

一、选择题：1~5　ABCDC　BDADA　CB

二、填空题：13．$-\frac{1}{2}$　14．$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　15．$\frac{125}{6}\pi$　16．2

三、解答题：

17．解：(1) $\because 3a_4$ 是 a_6，$-a_5$ 的等差中项，$\therefore 6a_4=a_6-a_5$，

设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $6a_1q^3=a_1q^5-a_1q^4$

$\therefore q^2-q-6=0$，解得 $q=3$ 或 $q=-2$（舍）；……………………………3分

$\therefore S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=40a_1=120$，$\therefore a_1=3$

所以 $a_n=3^n$ ……………………………6分

(2) 由已知得 $b_n=\log_3 3^{2n+1}=2n+1$；

所以 $T_n=3+5+\cdots\cdots+2n+1=n(n+2)$，……………………………8分

$\frac{1}{T_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$

$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_n}=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})]$

$\therefore \frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_n}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$ ……………………………12分

18．解：(1) 由表中数据知，$\bar{x}=3,\bar{y}=100$，……………………………1分

$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{1415-1500}{55-45}=-8.5$，……………………………4分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=125.5$，

$\therefore$ 所求回归直线方程为 $\hat{y}=-8.5x+125.5$ ……………………………6分

(2) 由 (1) 知，令 $x=7$，则 $\hat{y}=-8.5\times7+125.5=66$ 人.

预测该路口7月份的不“礼让斑马线”违章驾驶员人数为66人 ……………………………8分

(3) 由表中数据得 $K^2=\frac{50\times(22\times12-8\times8)^2}{30\times20\times30\times20}=\frac{50}{9}\approx5.556>5.024$，

根据统计有97.5%的把握认为“礼让斑马线”行为与驾龄有关．……………………………12分

19．(12分) 解：

(1) 证明：$\because PA=PD$，且 E 是 AD 的中点，

$\therefore PE \perp AD$， ………………………………………………………… 1分

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$

$\therefore PE \perp$ 平面 $ABCD$， ………………………………………………………… 3分

$\because BD \subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore BD \perp PE$ ……………………………………………………………………… 4分

又 $\because ABCD$ 为菱形，且 E,F 为边的中点，

$\therefore BD \perp AC$，且 $EF \parallel AC$，则 $BD \perp EF$， ……………………………… 5分

又 $BD \perp PE$，$PE \cap EF = E$，

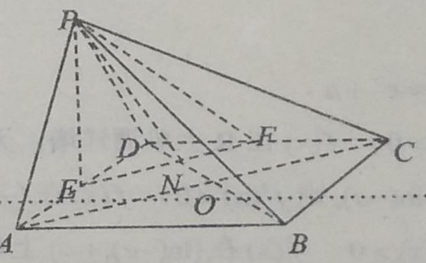
$\therefore BD \perp$ 平面 PEF. ………………………………………………………… 6分

（2）连接 AC 与 BD 交于点 O，EF 与 BD 交于点 N，连接 PN，

$\because AC \parallel EF$，$EF \subset$ 平面 PEF，

$\therefore AC \parallel$ 平面 PEF， ………………………………………………………… 8分

又 $\because NO:OB = 1:2$，



故在 PB 上取点 M，满足 $\dfrac{PM}{MB} = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore OM \parallel PN$，$PN \subset$ 平面 PEF，

$\therefore OM \parallel$ 平面 PEF， ………………………………………………………… 10分

$\because AC \cap OM = O$，

所以平面 $ACM \parallel$ 平面 PEF，

故存在点 M 满足条件，且 $\dfrac{PM}{MB} = \dfrac{1}{2}$. ………………………………………… 12分

20.（12分）解：

（1）由题，$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$，$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$，解得 $a = 2$，$c = 1$，

所以，椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. ………………………………………… 4分

（2）当直线 l 的斜率不存在时，可得 $|AB| = 3$，$|OP|^2 = 3$，

则 $t = \dfrac{|OP|^2}{|AB|} = 1$. ……………………………………………………………… 6分

当直线 l 的斜率存在时，设为 k，则 l 的方程为 $y = k(x+1)$，

联立方程组 $\begin{cases} y = k(x+1), \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 x，得 $(3+4k^2)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$.

设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$． ………… 8分

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(-\frac{8k^2}{3+4k^2})^2-4\cdot\frac{4k^2-12}{3+4k^2}}=\frac{12(k^2+1)}{3+4k^2}$． ………………………………………… 10分

直线OP的方程为$y=kx$代入椭圆C的方程可得到$x^2=\frac{12}{3+4k^2}$，$y^2=\frac{12k^2}{3+4k^2}$，

所以$|OP|^2=\frac{12(k^2+1)}{3+4k^2}$．

所以$|OP|^2=|AB|$，于是$t=1$． …………………………………………………………… 11分

于是，存在常数1，使得$|OP|^2=t\cdot|AB|$，即$|OP|^2=|AB|$成立． ……………… 12分

21．（12分）解：

（1）由题，$f'(x)=e^x+a$，

当$a\geq 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，无最小值； ……………… 2分

当$a<0$时，若$x<\ln(-a)$，则$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,\ln(-a))$上单调递减；

若$x>\ln(-a)$，则$f'(x)>0$，$f(x)$在$(\ln(-a),+\infty)$上单调递增． ……………… 4分

所以$f(x)$有极小值（最小值）$f(\ln(-a))=a\ln(-a)=0$，$\because a<0, \therefore a=-1$．

综上所述，$a=-1$． ………………………………………………………………………… 6分

（2）当$x>0$时，不等式$\ln(e^x-1)>\frac{x}{2}+\ln x$可化为$\ln\frac{e^x-1}{x}>\frac{x}{2}$，

等价于$\frac{e^x-1}{x}>e^{\frac{x}{2}}$，即$e^x-xe^{\frac{x}{2}}-1>0$， ………………………………… 8分

设$g(x)=e^x-xe^{\frac{x}{2}}-1$，则$g'(x)=e^x-\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}-1)$，

由（1）可知，$a=-1$时，$f(x)\geq f(0)=0$，

所以当$x>0$时，$e^x-x-1\geq 0$． ………………………………………… 10分

于是$e^{\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}-1>0$，$g'(x)>0, g(x)$单调递增．

$\therefore g(x)>g(0)=0$，即$e^x-xe^{\frac{x}{2}}-1>0$．

所以，当$x>0$时，$\ln(e^x-1)>\frac{x}{2}+\ln x$． ………………………………………… 12分

22．解：（1）因为$\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$，

所以$\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0$，所以$y^2=4x$ ……………………………………………………2

因为$\begin{cases}x=-1+2\cos\varphi\\y=2\sin\varphi\end{cases}$，所以$(x+1)^2+y^2=4$ ……………………………………………4

（2）将直线l的参数方程$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$代入$y^2=4x$得，$t^2-4\sqrt{2}t-4=0$

设M,N两点对应的参数为t_1,t_2

则$t_1+t_2=4\sqrt{2},t_1t_2=-4$ ……………………………………………………………………6

所以$\dfrac{1}{|PM|}+\dfrac{1}{|PN|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}$

$=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\sqrt{3}$ …………………………………………………………10

23．解：(I) 法1：$\because a>0$，$\therefore$当$x\le -a$时，$f(x)=-2x+3-a$，

此时$f(x)_{\min}=f(-a)=a+3$

当$-a<x<3$时，$f(x)=-x+3+x+a=a+3$，此时$f(x)_{\min}=f(-a)=a+3$

$\therefore$当$x\ge 3$时，$f(x)=2x-3+a$，此时$f(x)_{\min}=f(3)=a+3$

综上可知，$f(x)_{\min}=a+3=4$，　　$\therefore a=1$ ………………5分

法2：$\because f(x)=|x-3|+|x+a|\ge|(x-3)-(x+a)|=|a+3|$

$\therefore |a+3|=4$，得$a=1$或$a=-5$（舍去）　　$\therefore a=1$ ………………5分

(II) 证明1：由(I)知$a=1$，$\therefore m-n+l=1$

由柯西不等式得$(1^2+1^2+1^2)[m^2+(-n)^2+l^2]\ge(m-n+l)^2=1$

$\therefore m^2+n^2+l^2\ge\dfrac{1}{3}$（当且仅当$m=\dfrac{1}{3},n=-\dfrac{1}{3},l=\dfrac{1}{3}$时，等号成立）……10分

证明2：由(I)知$a=1$，$\therefore m-n+l=1$ $m=\dfrac{1}{3},n=-\dfrac{1}{3},l=\dfrac{1}{3}$

又$\because m^2+n^2\ge -2mn$，$m^2+l^2\ge 2ml$，$n^2+l^2\ge -2nl$

$\therefore 2(m^2+n^2+l^2)\ge -2mn+2ml-2nl$

$\therefore 3(m^2+n^2+l^2)\ge m^2+n^2+l^2-2mn+2ml-2nl=(m-n+l)^2=1$

$\therefore m^2+n^2+l^2\ge\dfrac{1}{3}$ ……………………………………………………10分