普通高等学校招生全国统一考试 仿真模拟(十二)　文科数学

一、选择题

1. A　$a+bi=\frac{-2+i}{1+i}=\frac{(-2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，

$\therefore a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2},a+b=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$.

2. B　$A=\{x|4-2x>0\}=(-\infty,2)$，$B=\{x|3-x\geqslant 0\}=(-\infty,3]$，$A\cap B=(-\infty,2)$.

3. A　$\because \cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore \frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}$，

即$\frac{1}{2}-\frac{\sin x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$，$\therefore \cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. A　圆心$(0,m)(m>0)$到渐近线$2x-y=0$的距离$d=\frac{m}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$，由$d=r$知$\frac{m}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，$\therefore m=5$.

5. D　由甲、乙两人的平均数相等，

得$\frac{15+21+20+x+25}{4}=\frac{18+23+20+y}{3}$$(x,y\in\{0,1,2,\cdots,9\})$，

$\therefore 3x-4y=1(x,y\in\{0,1,2,\cdots,9\})$，

$\therefore \begin{cases}x=3,\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=7,\\y=5.\end{cases}$当$\begin{cases}x=3,\\y=2\end{cases}$时，甲得分的中位数$\frac{21+23}{2}=22$，乙得分的平均数22，符合题意，同理可检得$\begin{cases}x=7,\\y=5\end{cases}$也满足甲、乙得分的中位数相等，故$x:y=\frac{3}{2}$或$\frac{7}{5}$.

6. B　由程序框图可知$y=\begin{cases}x+a, & x<0,\\4x-x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$

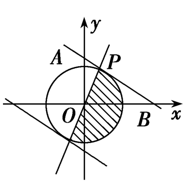
当$-1\leqslant x<0$时，$y=x+a\in[-1+a,a)$；

当$0\leqslant x\leqslant 3$时，$y=4x-x^2=4-(x-2)^2\in[0,4]$.

由题意$[-1+a,a)\subseteq[0,4]$，

$\therefore \begin{cases}-1+a\geqslant 0,\\a\leqslant 4,\end{cases}$ $\therefore 1\leqslant a\leqslant 4$.

7. C　可行域为如图所示的阴影部分(包括边界)，当$y=-x+z$与阴影相切于第一象限P点时，z最大，



$\because |OP|=1$，$\triangle AOB$为等腰直角三角形，

$\therefore |OA|=\sqrt{2}$，即z的最大值为$\sqrt{2}$.

8. B　设切点为$P(x_0,y_0)$，则$y_0=2\ln x_0+1$，

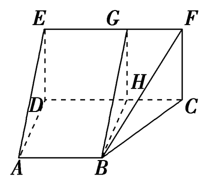
$\because y'=\frac{2}{x}$，$\therefore y'|_{x=x_0}=\frac{2}{x_0}$，

P处的切线方程为$y-(2\ln x_0+1)=\frac{2}{x_0}(x-x_0)$，

把$O(0,0)$代入切线方程，得$\ln x_0=\frac{1}{2}$，

$\therefore x_0=e^{\frac{1}{2}}$，故$a=\frac{2}{x_0}=\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}=2e^{-\frac{1}{2}}$.

9. A　由三视图知几何体如图所示.



几何体中，$CDEF$为矩形，且垂直于底面直角梯形$ABCD$，取EF、DC的中点G，H，连接GH，BH，则几何体DAE-HBG为直三棱柱，高为4，B-$CFGH$为四棱锥，高为$BH=4$，

$\therefore V=V_{三棱柱DAE\text{-}HBG}+V_{四棱锥B\text{-}CFGH}=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times 4+\frac{1}{3}\times 4\times 4\times 4=\frac{160}{3}$.

10. A　$\because f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，$\therefore f(0)=2^0+a=0$，$\therefore a=-1$，

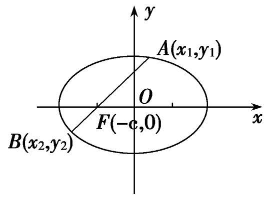
$\because f\left(x+\frac{5}{2}\right)=-f(x)$，

$\therefore f(5)=f\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}\right]=-f\left(x+\frac{5}{2}\right)=f(x)$，$T=5$，

$\therefore f(16)=f(3\times 5+1)=f(1)=-f(-1)=-[2^{-1}-1]=\frac{1}{2}$.

11. C　$\because c$为椭圆的半焦距，$\therefore$直线$y=x+c$过椭圆的左焦点$F(-c,0)$，

由题意可设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$$(x_1>0,x_2<0,y_1>0,y_2<0)$如图.



$\because |AF|=3|FB|, \therefore y_1=-3y_2$, ①

由$\begin{cases} y=x+c, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$消去 x 得 $b^2(y-c)^2+a^2y^2-a^2b^2=0$,

即$(a^2+b^2)y^2-2cb^2y-b^4=0$,

$\therefore \begin{cases} y_1+y_2=\frac{2cb^2}{a^2+b^2}, ② \\ y_1y_2=\frac{-b^4}{a^2+b^2}, ③ \end{cases}$

把①代入②,得 $y_2=\frac{-cb^2}{a^2+b^2}$,

把①代入③,得 $y_2^2=\frac{b^4}{3(a^2+b^2)}$.

$\therefore \left(\frac{-cb^2}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{b^4}{3(a^2+b^2)}$,即$\frac{c^2}{a^2+b^2}=\frac{1}{3}$,

$\therefore 3c^2=2a^2-c^2$,即 $2a^2=4c^2$,

$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}, e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. C $\because x\in(0,+\infty)$,

$\therefore e^x>0, (x^2-x+1)>0, x+3>0$,

$\because e^x(x^2-x+1)(ax+3a-1)<1$,

$\therefore a<\frac{1}{x+3}+\frac{1}{e^x(x^2-x+1)(x+3)}$.

令 $y=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{e^x(x^2-x+1)(x+3)}$,

$\because t=x+3$ 在$[0,+\infty)$上单调递增,

$T=e^x(x^2-x+1)$在$[0,+\infty)$上单调递增,

$\therefore y=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{e^x(x^2-x+1)(x+3)}$在$[0,+\infty)$上单调递减.

$\therefore y_{\max}=\frac{1}{3}+\frac{1}{e^0(0-0+1)(0+3)}=\frac{2}{3}$,

$\therefore$ 存在 $x\in(0,+\infty)$,使 $a<\frac{1}{x+3}+\frac{1}{e^x(x^2-x+1)(x+3)}$成立,即 $a<\frac{2}{3}$,故选 C.

二、填空题

13. 3

解析:$f(1)=f[f(7)]=f(5)=5-2=3$.

14. $-\frac{\pi}{12}$

解析:$\because T=\pi, \therefore \omega=2, f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,

$\therefore -\sqrt{2}=2\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\varphi\right]=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$,

$\therefore \sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

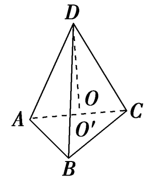
$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore -\frac{\pi}{6}+\varphi\in\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right), -\frac{\pi}{6}+\varphi=-\frac{\pi}{4}$,

$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{12}$.

15. 13

解析:$\because AB=6, AC=10, \angle ABC=\frac{\pi}{2}$,

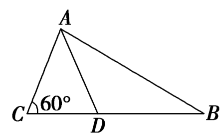


$\therefore AC=10$,O 在过 AC 的中点 O' 且与平面 ABC 垂直的平面上时 $V_{\text{四面体}A\text{-}BCD\text{最大}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 8\times 6|OD|=200$,

$\therefore |OD|=\frac{200}{8}$,设球 O 的半径为 R,有$\left(\frac{200}{8}-R\right)^2+|O'B|^2=R^2$,解得 $R=13$.

16. $\frac{\sqrt{13}-1}{3}$

解析:在$\triangle ABC$ 中,由正弦定理,得 $\frac{2}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{\sin B}$, $\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}, \cos B=\frac{\sqrt{13}}{4}$,



在$\triangle ACD$ 中,由正弦定理,

得$\frac{AD}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{\sin(\angle DAC+60^\circ)}$.

$\because \angle DAC=\angle B, \therefore AD=\frac{\sin 60^\circ}{\sin(B+60^\circ)}$

$=\frac{\sin 60^\circ}{\sin B\cos 60^\circ+\cos B\sin 60^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{13}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{13}+1}=\frac{\sqrt{13}-1}{3}$.

三、解答题

17. **解析**:(1) 由题设,$2S_n=(n+1)^2a_n-n^2a_{n+1}$,

$2S_{n+1}=(n+2)^2a_{n+1}-(n+1)^2a_{n+2}$,

两式相减得$(n+1)^2(a_{n+2}+a_n)=2(n+1)^2a_{n+1}$,

由于$(n+1)^2>0$,所以 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$,即$\{a_n\}$为等差数列,

由于 $2S_1=4a_1-a_2=2a_1$,可得 $a_2=2a_1=4$,

所以$\{a_n\}$的公差为 2,故 $a_n=2n$.

(2) 由题设,$b_nb_{n+1}=\lambda\cdot 2^{a_n}$, $b_{n+1}b_{n+2}=\lambda\cdot 2^{a_{n+1}}$,

两式相除可得 $b_{n+2}=4b_n$,

即$\{b_{2n}\}$和$\{b_{2n-1}\}$都是以4为公比的等比数列.

因为$b_1b_2=\lambda\cdot 2^{a_1}=4\lambda$,$b_1=1$,所以$b_2=4\lambda$,

由$b_3=4b_1=4$及$b_2^2=b_1b_3$得$4\lambda^2=1$,

又$\lambda>0$,所以$\lambda=\frac{1}{2}$.

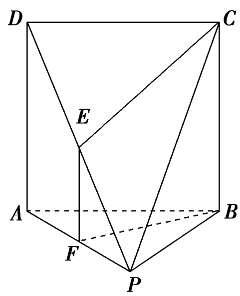
所以$b_{2n}=2\cdot 4^{n-1}=2^{2n-1}$,$b_{2n-1}=2^{2n-2}$,

即$b_n=2^{n-1}$,则$b_{n+1}=2b_n$.

因此存在$\lambda=\frac{1}{2}$,使得数列$\{b_n\}$为等比数列.

18. **解析**:(1)**证明**:取PA中点F,连接EF,BF,

则$EF/\!/AD/\!/BC$,即EF,BC共面.



因为$PB\perp$平面$ABCD$,所以$PB\perp BC$,

又因为$AB\perp BC$且$AB\cap PB=B$,

所以$BC\perp$平面PAB,所以$BC\perp PA$,

由于$PB=AB$,所以$BF\perp PA$,

又由于$BC\cap BF=B$,

因此,$PA\perp$平面$EFBC$,所以$PA\perp CE$.

(2)设四棱锥P-$ABCD$的表面积为S,

由于$PB\perp$平面$ABCD$,所以$PB\perp CD$,

又$CD\perp BC$,$PB\cap BC=B$,

所以$CD\perp$平面PBC,所以$CD\perp PC$,

即$\triangle PCD$为直角三角形,由(1)知$BC\perp$平面PAB,而$AD/\!/BC$,

所以$AD\perp$平面PAB,故$AD\perp PA$,即$\triangle PAD$也为直角三角形.

综上,$S=\frac{1}{2}PC\cdot CD+\frac{1}{2}PB\cdot CB+\frac{1}{2}PA\cdot AD+\frac{1}{2}AB\cdot PB+AB\cdot BC=8+4\sqrt{2}$.

19. **解析**:(1)该顾客有放回的抽奖两次的所有结果如下表:

1、1	1、2	1、3	1、4	1、5
2、1	2、2	2、3	2、4	2、5
3、1	3、2	3、3	3、4	3、5
4、1	4、2	4、3	4、4	4、5
5、1	5、2	5、3	5、4	5、5

两次都没有中奖的情况有:1、1,1、5,5、1,5、5,共4种.∴两次都没有中奖的概率为$P=\frac{4}{25}$.

(2)两次抽奖奖金之和为100元的情况有:

①第一次获奖100元,第二次没有获奖,其结果有31,35,故概率为$P_1=\frac{2}{25}$.

②第一次获奖50元,第二次也应该是50元,其结果有2、2,2、4,4、2,4、4,故概率为$P_2=\frac{4}{25}$.

③第一次没有获奖,第二次获奖100元,其结果有1、3,5、3,故概率为$P_3=\frac{2}{25}$.

∴两次抽奖奖金之和为100元的概率$=\frac{2}{25}+\frac{4}{25}+\frac{2}{25}=\frac{8}{25}$.

20. **解析**:(1)∵双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$过点$(2,1)$,

∴$\frac{4}{a^2}-b^2=1$.

∵右焦点$F(c,0)$到渐近线$bx-ay=0$的距离

$d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$,

∴$b=1$,$a^2=2$.

∴所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线AB的方程为$y=kx+m$.

将$y=kx+m$代入$x^2-2y^2=2$,

整理得$(2k^2-1)x^2+4kmx+2m^2+2=0$.

∴$x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2-1}$, ①

$x_1x_2=\frac{2m^2+2}{2k^2-1}$. ②

∵$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,∴$(x_1-2,y_1-1)\cdot(x_2-2,y_2-1)=0$,

∴$(x_1-2)(x_2-2)+(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)=0$.

∴$(k^2+1)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+m^2-2m+5=0$. ③

将①②代入③,得$m^2+8km+12k^2+2m+3=0$.

∴$(m+2k-1)(m+6k+3)=0$.而$P\notin AB$,

∴$m=-6k-3$,从而AB:$y=kx-6k-3$.

将 $y=kx-6k-3$ 代入 $x^2-2y^2-2=0$ 中，

判别式 $\Delta=8(34k^2+36+10)>0$ 恒成立.

$\therefore y=kx-6k-3$ 即为所求直线.

$\therefore P$ 到 AB 的距离 $d=\dfrac{|2k-6k-3-1|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{4|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$，

$\because \left(\dfrac{d}{4}\right)^2=\dfrac{k^2+1+2k}{k^2+1}=1+\dfrac{2k}{k^2+1}\leqslant 2$.

$\therefore d\leqslant 4\sqrt{2}$，即 P 到直线 AB 距离的最大值为 $4\sqrt{2}$.

21. **解析**：(1)由 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-2x+a$，

得切线的斜率 $k=f'(2)=a-3=-1$，$\therefore a=2$，

故 $f(x)=2\ln x-x^2+2x$，

由 $f(x)\geqslant 2x+m$，得 $m\leqslant 2\ln x-x^2$，

$\because$ 不等式 $f(x)\geqslant 2x+m$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$ 上有解，

$\therefore m\leqslant (2\ln x-x^2)_{\max}$.

令 $g(x)=2\ln x-x^2$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{x}-2x$

$=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{x}$，

$\because x\in\left[\dfrac{1}{e},e\right]$，故 $g'(x)=0$ 时，$x=1$.

当 $\dfrac{1}{e}<x<1$ 时，$g'(x)>0$；当 $1<x<e$ 时，$g'(x)<0$.

故 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 $g(1)=-1$，

$\therefore m\leqslant -1$.

(2)**证明**：$\because f(x)$ 的图象与 x 轴交于两个不同的点 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，

$\therefore$ 方程 $2\ln x-x^2+ax=0$ 的两个根为 x_1，x_2，

则 $\begin{cases}2\ln x_1-x_1^2+ax_1=0,\\ 2\ln x_2-x_2^2+ax_2=0,\end{cases}$ 两式相减得 $a=(x_1+x_2)-\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$，

又 $f(x)=2\ln x-x^2+ax$，$f'(x)=\dfrac{2}{x}-2x+a$，则

$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{4}{x_1+x_2}-(x_1+x_2)+a$

$=\dfrac{4}{x_1+x_2}-\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$，

要证 $\dfrac{4}{x_1+x_2}-\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}<0$，

即证明 $\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}+\ln\dfrac{x_1}{x_2}<0$，$t=\dfrac{x_1}{x_2}$，

$\because 0<x_1<x_2$，$\therefore 0<t<1$，

即证明 $u(t)=\dfrac{2(1-t)}{t+1}+\ln t<0$ 在 $0<t<1$ 上恒成立，

$\because u'(t)=\dfrac{-2(t+1)-2(1-t)}{(t+1)^2}+\dfrac{1}{t}$

$=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$，

又 $0<t<1$，$\therefore u'(t)>0$，

$\therefore u(t)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，则 $u(t)<u(1)=0$，

从而知 $\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}+\ln\dfrac{x_1}{x_2}<0$.

故 $\dfrac{4}{x_1+x_2}-\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}<0$，

即 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$ 成立.

22. **解析**：(1)直线 l 的普通方程为 $(\sin\alpha)x-(\cos\alpha)y-\sin\alpha=0$.

圆 C 的普通方程为 $x^2+y^2+4x=0$.

$\because C(-2,0)$，$\therefore C$ 到 l 的距离

$d=\dfrac{|-2\sin\alpha-\sin\alpha|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=3\sin\alpha=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\because 0\leqslant\alpha<\pi$，$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$.

(2)$\because \begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2+4x=0$，

得 $\therefore (1+t\cos\alpha)^2+(t\sin\alpha)^2+4(1+t\cos\alpha)=0$，

$\therefore t^2+6t\cos\alpha+5=0$.

设 A，B 对应参数为 t_1，t_2，则 $\begin{cases}t_1+t_2=-6\cos\alpha,\\ t_1t_2=5,\end{cases}$

$\because t_1t_2>0$，$\therefore t_1$，t_2 同号，

$\therefore \dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$.

23. **解析**：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|2x-2|+2$.

解不等式 $|2x-2|+2\leqslant 6$ 得 $-1\leqslant x\leqslant 3$.

因此 $f(x)\leqslant 6$ 的解集为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$.

(2)当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)+g(x)=|2x-a|+a+|1-2x|\geqslant|2x-a+1-2x|+a=|1-a|+a$，

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立，所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant 3$ 等价于 $|1-a|+a\geqslant 3$. ①

当 $a\leqslant 1$ 时，①等价于 $1-a+a\geqslant 3$，无解.

当 $a>1$ 时，①等价于 $a-1+a\geqslant 3$，解得 $a\geqslant 2$.

所以 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$.