学校______ 班级______ 姓名______ 准考证号______

模拟精编大考卷

绝密★启用前

普通高等学校招生全国统一考试 仿真模拟(十)

理科数学

本试卷共 8 页,24 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 150 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.其中第Ⅱ卷第(22)题～第(24)题为选考题,其它题为必考题.
2. 答题前,考生务必将密封线内项目填写清楚.考生作答时,请将答案答在答题卡上.必须在题号所指示的答题区域作答,**超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上答题无效.**
3. 做选考题时,考生须按照题目要求作答,并用 2B 铅笔在答题纸上把所选题号的题目涂黑.
4. 考试结束后,将本试题和答题纸一并交回.

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

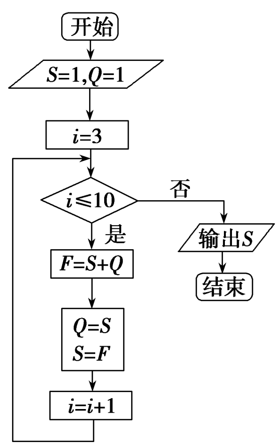
1. 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{x-4}\}$,$B=\{x|-1\leqslant 2x-1\leqslant 0\}$,则 $\complement_U A\cap B=$ ( )

A. $(4,+\infty)$ B. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ C. $\left(\frac{1}{2},4\right]$ D. $(1,4]$

2. 复数 z 满足 $z(1+i^3)=i$(i 是虚数单位),则复数 z 在复平面内位于 ( )

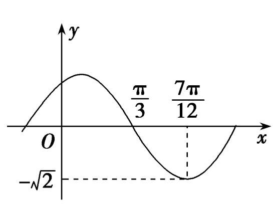
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 执行如图的程序框图,则输出的 $S=$ ( )



A. 21 B. 34 C. 55 D. 89

4. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的部分图象如图所示,则 $f\left(\frac{11\pi}{24}\right)$ 的值为 ( )



A. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. -1

5. 某中学有 3 个社团,每位同学参加各个社团的可能性相同,甲、乙两位同学均参加其中一个社团,则这两位同学参加不同社团的概率为 ( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

6. 下列表格所示的五个散点,原本数据完整,且利用最小二乘法求得这五个散点的线性回归直线方程为 $\hat{y}=0.8x-155$,后因某未知原因使第 5 组数据的 y 值模糊不清,此位置数据记为 m(如下表所示),则利用回归方程可求得实数 m 的值为 ( )

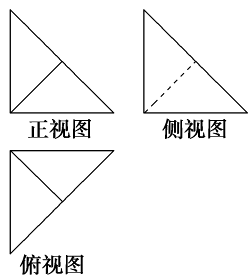
x	196	197	200	203	204
y	1	3	6	7	m

A. 8.3　　B. 8.2　　C. 8.1　　D. 8

7. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} y\geqslant 1, \\ y\leqslant 2x-1, \\ x+y\leqslant m, \end{cases}$ 如果目标函数 $z=x-y$ 的最小值为 -1,则实数 $m=$ ( )

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

8. (2017·**唐山市二模**)在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,$PA\perp$ 底面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 为正方形,$PA=AB$,该四棱锥被一平面截去一部分后,剩余部分的三视图如图,则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ( )



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

9. (2017·**太原市一模**)设函数 $f(x)=e^x+x-2$,$g(x)=\ln x+x^2-3$,若实数 a,b 满足 $f(a)=g(b)=0$,则 ( )

A. $f(b)<0<g(a)$　　B. $g(a)<0<f(b)$　　C. $0<g(a)<f(b)$　　D. $f(b)<g(a)<0$

10. 已知球 O 的半径为 R,A,B,C 三点在球 O 的球面上,球心 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{1}{2}R$,$AB=AC=2$,$\angle BAC=120°$,则球 O 的表面积为 ( )

A. $\frac{16}{9}\pi$　　B. $\frac{16}{3}\pi$　　C. $\frac{64}{9}\pi$　　D. $\frac{64}{3}\pi$

11. (2017·**咸阳市二模**)已知双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点 F 与抛物线 $C_2:y^2=2px(p>0)$ 的焦点相同,它们交于 A,B 两点,且直线 AB 过点 F,则双曲线 C_1 的离心率为 ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. 2

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^{|x-1|}, x>0, \\ -x^2-2x+1, x\leqslant 0, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x)-3f(x)+a=0(a\in\mathbf{R})$ 有 8 个不等的实数根,则 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},3\right)$　　C. $(1,2)$　　D. $\left(2,\frac{9}{4}\right)$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第 13 题~第 21 题为必考题,每个试题考生都必须做答,第 22 题~第 24 题为选考题,考生根据要求做答.

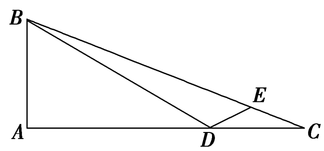
二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题纸上)

13.(2017·**福建省质检**)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{2\pi}{3}$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=3$,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

14. 设曲线 $y=ax-\ln(x+1)$在点$(0,0)$处的切线方程为 $y=2x$,则 $a=$________.

15.(2017·**石家庄市一模**)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 的左、右焦点为 F_1、F_2,点 F_1 关于直线 $y=-x$ 的对称点 P 仍在椭圆上,则$\triangle PF_1F_2$ 的周长为________.

16. 如图,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle A=90°$,D,E 分别是 AC,BC 上一点,满足$\angle ADB=\angle CDE=30°$,$BE=4CE$. 若 $CD=\sqrt{3}$,则$\triangle BDE$ 的面积为________.



三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

17.(本小题满分 12 分)

正项等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_n>0$,$a_1+a_2+a_3=15$,且 a_1+2,a_2+5,a_3+13 构成等比数列$\{b_n\}$的前三项.

(1)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(本小题满分 12 分)

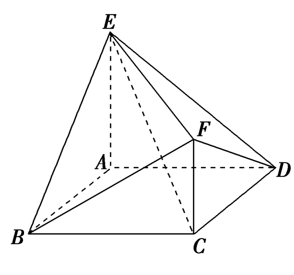
甲、乙两人投篮命中的概率分别为$\frac{2}{3}$与$\frac{1}{2}$,各自相互独立. 现两人做投篮游戏,共比赛 3 局,每局每人各投一球.

(1)求比赛结束后甲的进球数比乙的进球数多 1 个的概率;

(2)设 ξ 表示比赛结束后甲、乙两人进球数的差的绝对值,求 ξ 的概率分布和数学期望 $E(\xi)$.

19.(本小题满分 12 分)

如图,已知多面体 $ABCDEF$ 中,$ABCD$ 为菱形,$\angle ABC=60°$,$AE\perp$平面 $ABCD$,$AE/\!/CF$,$AB=AE=1$,$AF\perp BE$.



(1)求证:平面 $BAF\perp$平面 BDE;

(2)求二面角 B-AF-D 的余弦值.

20.（本小题满分 12 分）

（2017·**杭州市二模**）设直线 l 与抛物线 $x^2=2y$ 交于 A,B 两点，与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 C,D 两点，直线 OA,OB,OC,OD（O 为坐标原点）的斜率分别为 k_1,k_2,k_3,k_4，若 $OA\perp OB$.

(1)是否存在实数 t，满足 $k_1+k_2=t(k_3+k_4)$，并说明理由；

(2)求$\triangle OCD$ 面积的最大值.

21.（本小题满分 12 分）

设 $f(x)=\frac{(x+a)\ln x}{x+1}$，曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线与直线 $2x+y+1=0$ 垂直.

(1)求 a 的值；

(2)若 $\forall x\in[1,+\infty)$，$f(x)\leqslant m(x-1)$恒成立，求 m 的取值范围；

(3)求证：$\ln\sqrt[4]{2n+1}<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{4i^2-1}$($n\in\mathbf{N}^*$).

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

以直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，且两个坐标系取相等的长度单位. 已知直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$0<\alpha<\pi$），曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程；

(2)设直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，当 α 变化时，求$|AB|$的最小值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant -6$ 的解集；

(2)若存在实数 x 满足 $f(x)=\log_2 a$，求实数 a 的取值范围.

普通高等学校招生全国统一考试 仿真模拟(十)　理科数学

一、选择题

1. B　$A=\{x|y=\sqrt{x-4}\}=\{x|x\geqslant 4\}$,

$\therefore \complement_U A=\{x|x<4\}$;

$B=\{x|-1\leqslant 2x-1\leqslant 0\}=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\right\}$,

所以 $\complement_U A\cap B=\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2. B　$z=\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^3}=\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{-1+\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,$\therefore$复数 z 在复平面内位于第二象限.

3. C　$i=3<10,F=2,Q=1,S=2$;

$i=4<10,F=3,Q=2,S=3$;

$i=5<10,F=5,Q=3,S=5$;

$i=6<10,F=8,Q=5,S=8$;

$i=7<10,F=13,Q=8,S=13$;

$i=8<10,F=21,Q=13,S=21$;

$i=9<10,F=34,Q=21,S=34$;

$i=10\leqslant 10,F=55,Q=34,S=55$;

$i=11>10$,输出 $S=55$.

4. D　$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4},T=\pi,\omega=2,A=\sqrt{2}$,

$-\sqrt{2}=\sqrt{2}\sin\left(2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)$,

即 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-1,\frac{7\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,

即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,令 $k=0$ 得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

故 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore f\left(\frac{11\pi}{24}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2\times\frac{11\pi}{24}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

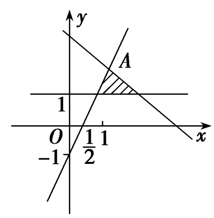
$=-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=-1$.

5. C　甲参加社团有 3 种方法,乙参加社团有 3 种方法,$\therefore$甲、乙均参加社团有 $3\times 3=9$ 种方法;甲、乙参加同一社团有 3 种方法,故甲、乙参加不同社团的概率为 $P=1-\frac{3}{9}=\frac{2}{3}$.

6. D　$\bar{x}=\frac{196+197+200+203+204}{5}=200$,

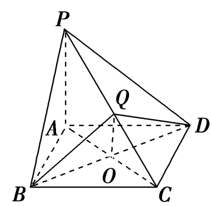
$\bar{y}=\frac{1+3+6+7+m}{5}=\frac{17+m}{5}$,由回归直线经过样本中心,$\frac{17+m}{5}=0.8\times 200-155\Rightarrow m=8$.

7. B　由 $\begin{cases}y=2x-1,\\x+y=m\end{cases}$ 得 $A\left(\frac{m+1}{3},\frac{2m-1}{3}\right)$,$z=x-y$ 取得最小值,即直线 $y=x-z$ 在 y 轴上的截距 $-z$ 取得最大值的最优解为 $A\left(\frac{m+1}{3},\frac{2m-1}{3}\right)$,



$\therefore -1=\frac{m+1}{3}-\frac{2m-1}{3},\therefore m=5$.

8. B　由三视图知,剩余部分的几何体是四棱锥 P-$ABCD$ 被平面 QBD 截去三棱锥 Q-BCD(Q 为 PC 中点)后的部分,连接 AC 交 BD 于 O,连接 OQ,则 $OQ\mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}}\frac{1}{2}PA$,



设 $PA=AB=a$,则 $V_{四棱锥P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}a^3$,

$V_{三棱锥Q\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{12}a^3$,

剩余部分的体积为 $\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{12}a^3$,

故所求体积比为 $\frac{\frac{1}{12}a^3}{\frac{1}{3}a^3-\frac{a^3}{12}}=\frac{1}{3}$.

9. B　易知 $f(x)$ 是增函数,$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也是增函数,

由于 $f(0)=-1<0,f(1)=\mathrm{e}-1>0$,所以 $0<a<1$;

又 $g(1)=-2<0,g(2)=\ln 2+1>0$,所以 $1<b<2$,

所以 $f(b)>0,g(a)<0$,故 $g(a)<0<f(b)$.

10. D　由余弦定理，得：

$BC=\sqrt{4+4-2\times 2\times 2\cos 120^{\circ}}=2\sqrt{3}$，

设三角 ABC 外接圆半径为 r，

由正弦定理：$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120^{\circ}}=2r$，得 $r=2$，

又 $R^2=\dfrac{1}{4}R^2+4$，所以，$R^2=\dfrac{16}{3}$，

表面积为：$4\pi R^2=\dfrac{64}{3}\pi$.

11. C　设双曲线 C_1 的左焦点为 $F'(-c,0)$，

由题意 $F(c,0)$，$c=\dfrac{p}{2}$，

$\therefore A\left(\dfrac{p}{2},p\right)$，$B\left(\dfrac{p}{2},-p\right)$，即 $A(c,2c)$，$B(c,-2c)$，

又 $|AF'|-|AF|=2a$，$|AF'|=\sqrt{|F'F|^2+|PF|^2}$

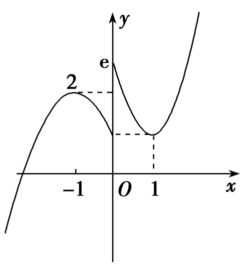
$=\sqrt{(2c)^2+(2c)^2}=2\sqrt{2}c$，

$\therefore 2\sqrt{2}c-2c=2a$，即 $(\sqrt{2}-1)c=2a$，

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

12. D　画出 $f(x)=\begin{cases}e^{|x-1|}, x>0,\\ -x^2-2x+1, x\leqslant 0\end{cases}$ 的图象

如图，



令 $f(x)=t$，由题知，$t^2-3t+a=0$ 在 $(1,2)$ 上有两个不相等的实数根，

令 $g(t)=t^2-3t+a(1<t<2)$，

则 $\begin{cases}g(1)>0,\\ g(2)>0,\\ g\left(\dfrac{3}{2}\right)<0,\end{cases}\Rightarrow 2<a<\dfrac{9}{4}$.

二、填空题

13. $\sqrt{7}$

解析：$\because |\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times 3\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{3}{2}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1^2+2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+3^2=7$，

$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

14. 3

解析：$y'=a-\dfrac{1}{x+1}$，$y'|_{x=0}=a-1$，

由题意知 $a-1=2$，$\therefore a=3$.

15. $2+2\sqrt{2}$

解析：$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)(c>0)$，

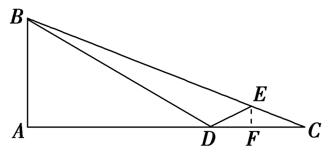
F_1 关于直线 $y=-x$ 的对称点 P 坐标为 $(0,c)$，

$\therefore c=b=1$，$a^2=b^2+c^2=2$，$a=\sqrt{2}$，

$\therefore\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=2\sqrt{2}+2$.

16. $\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

解析：过点 E 作 $EF\perp AC$ 于 F，如图所示.



由 $\angle A=90^{\circ}$，知 $EF\parallel AB$，再由 $BE=4CE$，得 $EF=\dfrac{1}{5}AB$.

设 $EF=x$，则 $AB=5x$.

又 $\angle ADB=\angle CDE=30^{\circ}$，得 $BD=10x$，$AD=5\sqrt{3}x$，$\angle BDE=120^{\circ}$.

由勾股定理，得 $BC^2=(\sqrt{3}+5\sqrt{3}x)^2+25x^2=100x^2+30x+3$.

又由余弦定理，得 $BE^2=(10x)^2+(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot 10x\cos 120^{\circ}=124x^2$.

又 $BE=4CE$，所以 $BC=\dfrac{5}{4}BE$，所以 $100x^2+30x+3=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2\times 124x^2$，

解得 $x=\dfrac{2}{5}$ 或 $x=-\dfrac{2}{25}$（舍去），

所以 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}BD\cdot DE\sin 120^{\circ}=5\sqrt{3}x^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$.

三、解答题

17. **解析**：(1)设等差数列的公差为 d，则由已知得：

$a_1+a_2+a_3=3a_2=15$，即 $a_2=5$，

又 $(5-d+2)(5+d+13)=100$，解得 $d=2$ 或 $d=-13$（舍去），

$a_1=a_2-d=3$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)\times d=2n+1$，

又 $b_1=a_1+2=5$，$b_2=a_2+5=10$，所以 $q=2$，

所以 $b_n=5\cdot 2^{n-1}$.

(2)因为 $T_n=5[3+5\times2+7\times2^2+\cdots+(2n+1)\times2^{n-1}]$，

$2T_n=5[3\times2+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n+1)\times2^n]$，

两式相减得 $-T_n=5[3+2\times2+2\times2^2+\cdots+2\times2^{n-1}-(2n+1)\times2^n]=5[(1-2n)2^n-1]$，

则 $T_n=5[(2n-1)2^n+1]$.

18. **解析**：(1)比赛结束后甲的进球数比乙的进球数多1个有以下几种情况：甲进1球，乙进0球；甲进2球，乙进1球；甲进3球，乙进2球.

所以比赛结束后甲的进球数比乙的进球数多1个概率 $P=C_3^1\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{11}{36}$.

(2)ξ的取值为0,1,2,3，所以ξ的概率分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$

所以数学期望 $E(\xi)=0\times\frac{7}{24}+1\times\frac{11}{24}+2\times\frac{5}{24}+3\times\frac{1}{24}=1$.

19. **解析**：(1)**证明**：$\because AE\parallel CF$，$\therefore$四点 A、C、F、E 共面.

如图所示，连接 AC，BD，相交于点 O，

$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore$对角线 $BD\perp AC$，

$\because AE\perp$平面 $ABCD$，

$\therefore AE\perp BD$，又 $AE\cap AC=A$，

$\therefore BD\perp$平面 $ACFE$，

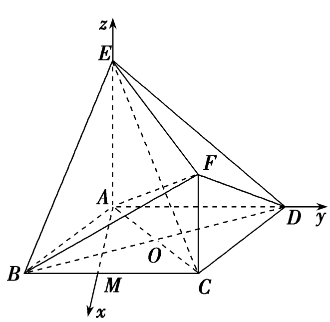
$\therefore BD\perp AF$，

又 $AF\perp BE$，$BE\cap BD=B$，

$\therefore AF\perp$平面 BDE，

$AF\subset$平面 BAF，

$\therefore$平面 $BAF\perp$平面 BDE.



(2)取 BC 的中点 M，

$\because\angle ABC=60°$，$AB=BC$，

$\therefore\triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore AM\perp BC$，

又 $BC\parallel AD$，$\therefore AM\perp AD$，建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},z\right)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,1)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},z\right)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

$\because AF\perp BE$.

$\therefore\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+z=0$，解得 $z=\frac{1}{2}$.

设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$.

同理可得：平面 AFD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,-\sqrt{3})$.

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{7}{2\times4}=\frac{7}{8}$.

由图可知：二面角 B-AF-D 的平面角为钝角，

$\therefore$二面角 B-AF-D 的余弦值为 $-\frac{7}{8}$.

20. **解析**：设直线 l 方程为 $y=kx+b$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$.

联立 $y=kx+b$ 和 $x^2=2y$，

得 $x^2-2kx-2b=0$，

则 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=-2b$，$\Delta_1=4k^2+8b>0$.

由 $OA\perp OB$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$，得 $b=2$.

联立 $y=kx+2$ 和 $3x^2+4y^2=12$，得 $(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$，

所以 $x_3+x_4=-\frac{16k}{3+4k^2}$，$x_3x_4=\frac{4}{3+4k^2}$.

由 $\Delta_2=192k^2-48>0$，得 $k^2>\frac{1}{4}$.

(1)因为 $k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=k$，$k_3+k_4=\frac{y_3}{x_3}+\frac{y_4}{x_4}=-6k$，

所以$\frac{k_1+k_2}{k_3+k_4}=-\frac{1}{6}$.

(2)根据弦长公式$|CD|=\sqrt{1+k^2}|x_3-x_4|$,得:

$|CD|=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{4k^2-1}}{3+4k^2}$,

根据点O到直线CD的距离公式,得$d=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以$S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}|CD|\cdot d=4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{4k^2-1}}{3+4k^2}$,

设$\sqrt{4k^2-1}=t>0$,则$S_{\triangle OCD}=\frac{4\sqrt{3}t}{t^2+4}\leqslant\sqrt{3}$,

所以当$t=2$,即$k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$时,$S_{\triangle OCD}$有最大值$\sqrt{3}$.

21. 解析:(1)因为

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+a}{x}+\ln x\right)(x+1)-(x+a)\ln x}{(x+1)^2},$$

由题设$f'(1)=\frac{1}{2}$,所以$\frac{2(a+1)}{4}=\frac{1}{2}$,所以$a=0$.

(2)$f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$,$\forall x\in[1,+\infty)$,$f(x)\leqslant m(x-1)$恒成立,即$\ln x\leqslant m\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

设$g(x)=\ln x-m\left(x-\frac{1}{x}\right)$,即$\forall x\in[1,+\infty)$,$g(x)\leqslant 0$,而$g'(x)=\frac{1}{x}-m\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-mx^2+x-m}{x^2}$,

①若$m\leqslant 0$,$g'(x)>0$,$g(x)\geqslant g(1)=0$,这与题设矛盾;

②若$m>0$,方程$-mx^2+x-m=0$根的判别式$\Delta=1-4m^2$,

当$\Delta\leqslant 0$,即$m\geqslant\frac{1}{2}$时,

所以$g(x)\leqslant g(1)=0$,即不等式成立;

当$0<m<\frac{1}{2}$时,方程其根$x_1=\frac{1-\sqrt{1-4m^2}}{2m}>0$,

$x_2=\frac{1+\sqrt{1-4m^2}}{2m}>1$;

当$x\in(1,x_2)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,则$g(x)>g(1)=0$,与题设矛盾,综上,$m\geqslant\frac{1}{2}$.

(3)由(2)知,当$x>1$时,$m=\frac{1}{2}$时,

$\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$成立.

不妨令$x=\frac{2k+1}{2k-1}$,$k\in\mathbf{N}^*$,

所以$\ln\frac{2k+1}{2k-1}<\frac{1}{2}\left(\frac{2k+1}{2k-1}-\frac{2k-1}{2k+1}\right)=\frac{4k}{4k^2-1}$,

即$\frac{1}{4}[\ln(2k+1)-\ln(2k-1)]<\frac{k}{4k^2-1}$,$k\in\mathbf{N}^*$.

$$\begin{cases}\frac{1}{4}[\ln 3-\ln 1]<\frac{1}{4\times 1^2-1},\\ \frac{1}{4}[\ln 5-\ln 3]<\frac{2}{4\times 2^2-1},\\ \cdots\\ \frac{1}{4}[\ln(2n+1)-\ln(2n-1)]<\frac{n}{4\times n^2-1},\end{cases}$$

累加得:$\frac{1}{4}\ln(2n+1)<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{4i^2-1}$,

即$\ln\sqrt[4]{2n+1}<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{4i^2-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

22. **解析**:(1)由$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$,得$(\rho\sin\theta)^2=4\rho\cos\theta$,

∴曲线C的直角坐标方程为$y^2=4x$.

(2)将直线l的参数方程代入$y^2=4x$得到$t^2\sin^2\alpha-4t\cos\alpha-4=0$.

设A,B两点对应的参数分别是t_1,t_2,

则$t_1+t_2=\frac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$,$t_1t_2=-\frac{4}{\sin^2\alpha}$.

∴$|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\frac{4}{\sin^2\alpha}\geqslant 4$,

当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时取到等号.

∴$|AB|_{\min}=4$.

23. **解析**:(1)$f(x)=|x+1|-2|x|=\begin{cases}x-1,x<-1,\\3x+1,-1\leqslant x\leqslant 0,\\1-x,x>0.\end{cases}$

则不等式$f(x)\leqslant -6$等价于$\begin{cases}x<-1,\\x-1\leqslant -6\end{cases}$或$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 0,\\3x+1\leqslant -6\end{cases}$或$\begin{cases}x>0,\\1-x\leqslant -6.\end{cases}$

解得$x\leqslant -5$或$x\geqslant 7$.

故该不等式的解集是$\{x|x\leqslant -5$或$x\geqslant 7\}$.

(2)若存在实数x满足$f(x)=\log_2 a$,

即关于x的方程$f(x)=\log_2 a$在实数集上有解,

则$\log_2 a$的取值范围是函数$f(x)$的值域.

由(1)可得函数$f(x)$的值域是$(-\infty,1]$,

∴$\log_2 a\leqslant 1$,解得$0<a\leqslant 2$.