2018年沈阳市高中三年级质量监测（三）

文科数学

命题：沈阳四中　孙玉才　沈阳五中　伊全才
沈阳回民中学　程绍臣　沈阳11中　孙国华
沈阳120中学　孙　爽　沈阳外国语　张　颖
审题：沈阳市教育研究院　王恩宾

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上，并将条码粘贴在答题卡指定区域。
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第Ⅱ卷用黑色墨水签字笔在答题卡指定位置书写作答，在本试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，考生将答题卡交回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知 i 为虚数单位，则 $\left(\dfrac{1+2i}{2-i}\right)^2=$

A．$\dfrac{4+3i}{5}$　　B．i　　C．1　　D．-1

2．已知集合 $M=\{-1,0,1,2\}$，$N=\{y\,|\,y=x^2,x\in M\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{-1,1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,1,3,5\}$　　D．$\{-1,0,1,4\}$

3．某校在高二年级进行“三城三创”演讲比赛，如果高二8班从3男1女4位同学中选派2位同学参加某演讲比赛，那么选派的都是男生的概率是

A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

4．若平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，$\vec{a}=(\sqrt{3},1)$，$|\vec{b}|=2$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$

A．$2\sqrt{3}$　　B．2

C．$2\sqrt{5}$　　D．4

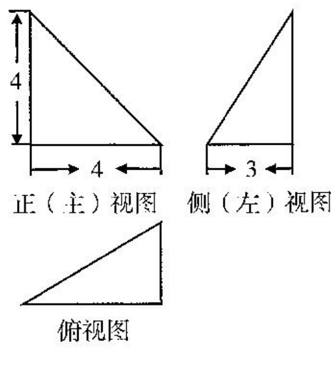
5．若某四面体的三视图如图所示，则该四面体的表面积是

A．$24+6\sqrt{2}$

B．$6\sqrt{2}$

C．10

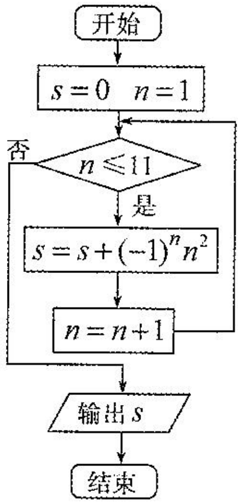
D．24



6. 若在圆$x^2+y^2-2x-6y=0$内过点$E\left(0,1\right)$的最长弦和最短弦分别为AC和BD,则四边形$ABCD$的面积为

A. $5\sqrt{2}$　　B. $10\sqrt{2}$

C. $15\sqrt{2}$　　D. $20\sqrt{2}$



7. 若执行如图所示的程序框图，则输出的s的值为

A. 55　　B. 78

C. -66　　D. 176

8. 若过抛物线$x^2=4y$的焦点，且斜率为1的直线交抛物线于A、B两点，则$\left|AB\right|$为

A. 6　　B. 8

C. 10　　D. 12

9. 下列命题：①若$f\left(x\right)=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$,则$f\left(x+\pi\right)=f\left(x\right)$对$x\in\mathbf{R}$恒成立；

②要得到函数$y=\sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4})$的图象，只需将$y=\sin\dfrac{x}{2}$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位；

③若锐角α,β满足$\cos\alpha>\sin\beta$，则$\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$. 其中真命题的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. 若某正四面体内切球的体积为$\dfrac{4\pi}{3}$，则正四面体外接球的表面积为

A. 4π　　B. 16π　　C. 36π　　D. 64π

11. 已知$a,b\in(0,1)$,且$\log_a 2>\log_b 2$，c、$d\in(1,+\infty)$,且$c^{-\frac{1}{3}}>d^{-\frac{1}{3}}$，则下列不等式恒成立的是

A. $a^{0.2}<b^{0.1}$　　B. $0.2^a<0.3^b$

C. $\log_{0.2}c>\log_d 2$　　D. $0.5^{-c}<d^{-0.5}$

12. 设$f\left(x\right)=2x-\sin x$，当$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时，$f(m\sin\theta)+f(1-m)>0$恒成立，则实数$m$的取值范围是

A. $(0,1)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(-\infty,\dfrac{1}{2})$　　D. $(-\infty,1)$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题纸上．

13．若焦点在x轴上的双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$，则双曲线的离心率为______．

14．在$\triangle ABC$中，A、B、C对边分别为a、b、c．若$a=8, b=6, \sin B=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, 则$\angle A=$________．

15．已知(x,y) $(x,y\in \mathbf{Z})$是$\triangle ABC$的三条边围成的平面区域（不包括三角形的三边）内的点，其中点$A(-2,1)$、$B(5,1)$、$C(3,4)$,则$2x+y$的最大值是________．

16．已知$f(x)=\begin{cases} x\ln x, x>0 \\ \frac{x}{e^{x}}, x\le 0 \end{cases}$，若方程$f(x)=a$有三个不同的实根，则实数$a$的值为________．

三、解答题：共 70 分．解答应按要求写出文字说明、证明过程或演算步骤．(一)第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17．（本小题满分 12 分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2+1$，在等比数列$\{b_n\}$中，$b_1=\frac{1}{3}$，公比$q=\frac{1}{3}$．

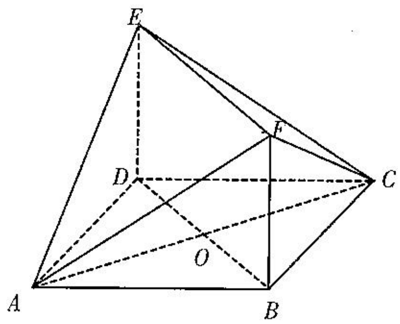
（Ⅰ）求a_n；

（Ⅱ）令$c_n=a_n\cdot b_n$，设T_n为$\{c_n\}$的前n项和，求T_n．

18．（本小题满分 12 分）已知菱形$ABCD$，其中$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，矩形$BDEF$垂直于底面$ABCD$，$BD=2BF$．

（Ⅰ）证明：平面$ACE\perp$平面ACF；

（Ⅱ）若三棱锥$A-CEF$的体积为$18\sqrt{3}$，求菱形的边长．



19.（本小题满分 12 分）

根据相关数据统计，沈阳市每年的空气质量优良天数整体好转，2013 年沈阳优良天数是 191 天，2014 年优良天数 178 天，2015 年优良天数 193 天，2016 年优良天数 242 天，2017 年优良天数为 256 天，把 2013 年年份用代码 1 表示，以此类推，2014 年用 2 表示，2015 年用 3 表示，2016 年用 4 表示，2017 年用 5 表示，得到如下数据：

年份代码 x	1	2	3	4	5
优良天数 y	191	178	193	242	256

（Ⅰ）试求 y 关于 x 的线性回归方程（系数精确到 0.1）;

（Ⅱ）试根据（Ⅰ）求出的线性回归方程，预测 2018 年空气质量优良天数是多少天（精确到整数）？

附：参考数据 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=3374,\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$，参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n(\bar{x})^2}$ 或 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过右焦点 F 且垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 $P(\sqrt{2},1)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）过点 $(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于 A、B 两点，且以 AB 为直径的圆经过原点 O，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=-x^3+(2a+1)x^2-(2a-1)x-1$，$g(x)=(x+1)\ln x-3x^2+x-2(a-1)$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $x\geq 1$ 时，若 $g(x)\geq f'(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分，请考生在 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题记分．

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：极坐标与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C 的参数方程为$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$（ θ为参数），直线 m 的参数方程为$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \end{cases}$（ t 为参数），直线 l 垂直于直线 m 且过椭圆 C 的右焦点 F .

（Ⅰ）求椭圆 C的普通方程和直线 l 的参数方程；

（Ⅱ）若直线 l 交椭圆 C 于 A、B 两点,求$\left|\dfrac{1}{|FA|}-\dfrac{1}{|FB|}\right|$.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-2|$.

（Ⅰ）若 $g(x)=f(x)-f(1+x)$,求 $g(x)$ 的最大值 m ；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，对任意的正实数 a、b 满足 $a+b=m$ ，

求证：$a^3+b^3 \geq (a^2+b^2)^2$.

2018年沈阳市高三数学质量监测（三）

文科数学参考答案

1、[解答]：由$\frac{a+bi}{b-ai}=i$及$i^2=-1$，选 D.

2. [解答]：由题意$N=\{0,1,4\}$，所以选 B.

3、[解答]：由古典概型可知$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，选项 D 正确

4. [解答]：由向量的几何意义可知 B

5. [解答]：四个面均为直角三角形，表面积为$24+6\sqrt{2}$，选 A。

6. [解答]：由圆的基本性质和垂径定理可知，最长弦为直径$2\sqrt{10}$，最短弦$2\sqrt{5}$

所以四边形面积为 B。

7、 [解答]：选 C

8.[解答]：由焦点弦长公式可知 B

9. [解答]：① $f(x)=\cos x$，周期为π，错。②③对，选 C。

10. [解答]：内切球半径为 1，所以外接球半径为 3，S=$4\pi\times 3^2$，选 C

11.[解答]：指数函数、对数函数、幂函数的图象和性质。选 A.

12、[解答]：易知 $f(x)$为奇函数，且 $f'(x)=2-\cos x>0$，所以 $f(x)$单调递增，

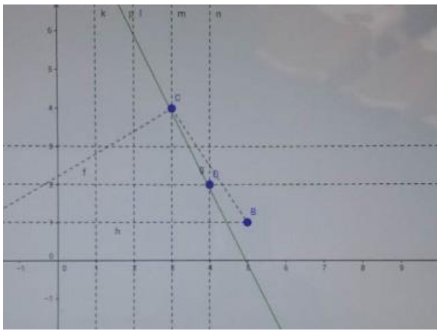
$f(m\sin\theta)>-f(1-m)=f(m-1)$，即$m\sin\theta>m-1$，$m(1-\sin\theta)<1$，所以 D 正确。

二、填空题

13、[解答]：由$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{4}$

14、[解答]：由正弦定理，$\angle A=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

15.[解答]：整点问题，最大值为 10.



16.［解答］：因为$x\ln x$在$(0,\dfrac{1}{e})$上单调递减，在$(\dfrac{1}{e},+\infty)$上单调递增，故当$x=\dfrac{1}{e}$时，

$f(x)$有最小值$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；又$\dfrac{x}{e^x}$在$(-\infty,0)$上单调递增。所以$a\in\left(-\dfrac{1}{e},0\right)$.

三、解答题：

17.解：

（Ⅰ）$n=1$，$a_1=S_1=2$；……………2 分

$n\geqslant 2$，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-\left((n-1)^2+1\right)=2n-1$ ……………4 分

$\therefore a_n=\begin{cases}2, n=1\\2n-1, n\geq 2\end{cases}$ ……………6 分

（Ⅱ）由题意，$b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\left(n\in N^*\right)$，$\therefore c_n=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, & n=1\\(2n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n, & n\geq 2\end{cases}$；……………8 分

当$n=1, T_1=\dfrac{2}{3}$，

当$n\geqslant 2$，$T_n=\dfrac{2}{3}+3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+5\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+7\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ①

$\dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{2}{9}+3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+5\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4+7\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^5+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ ②

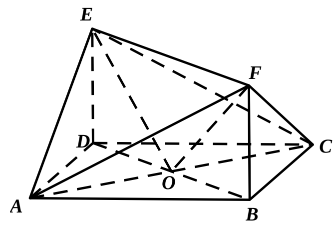
①-②得 $\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{7}{9}+2[\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^4+\left(\dfrac{1}{3}\right)^5+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n]-(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ ………10 分

$\therefore T_n=\dfrac{4}{3}-(n+1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\ (n\geq 2)$，经检验$n=1$也成立。

$\therefore T_n=\dfrac{4}{3}-(n+1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\ \left(n\in N^*\right)$ …………12 分

18.

证明：（Ⅰ）连接 EO 、 FO .



$\because$ $BDEF$ 为矩形，且 $BD=2BF$ ， $\therefore EO\perp FO$.

$\because$ $ABCD$ 为菱形，$\therefore AC\perp BD$.

又$\because$面 $BDEF\perp$底面 $ABCD$ ，

面 $BDEF\bigcap$底面 $ABCD=BD$, $AC\subset$面$ABCD$,

$\therefore AC\perp$面$BDEF$.

又$\because$ $EO\subset$面$BDEF$, $\therefore AC\perp EO$.

又$\because FO\subset$面ACF, $AC\subset$面ACF，$FO\bigcap AC=O$,

$\therefore EO\perp$面ACE ,

又$\because$ $EO\subset$面ACE , $\therefore$平面 $ACE\perp$平面 ACF . ……………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $EO\perp$平面ACF , EO为三棱锥$E-ACF$的高 .

设 $AB=2a$ ，则由 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$ 且 $ABCD$ 为菱形，可知 $AC=2\sqrt{3}a$.

由 $AB=BD=2BF=2a$ ，可知 $EO=FO=\sqrt{2}a$.

$\therefore V_{E-ACF}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ACF}\cdot EO=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{6}a^2\cdot\sqrt{2}a=18\sqrt{3}$.

$\therefore a=3$，即 $AB=2a=6$. ……………12 分

19、[解答]：

（Ⅰ） $\bar{x}=3,\bar{y}=212$ ，……………………………………………………………2 分

$5\bar{x}\bar{y}=3180, 5\left(\bar{x}\right)^2=45$ ……………………………………………………………4 分

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5(\bar{x})^2}=\frac{3374-3180}{55-45}=19.4\ , a=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=212-19.4\times3=153.8$$

$\therefore$线性回归方程为$y=19.4x+153.8$……………………………………6 分

（Ⅱ）由题意可知，2018 年的年份代码为 6，…………………………………8 分

所以$\therefore y = 19.4 \times 6 + 153.8 = 270.2$ ……………………………10 分

由题意，精确到整数，所以 2018 年优良天数大约 270 天。……………………12 分

20. 解：（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ ……………4 分

（Ⅱ）由题意可知，直线的斜率存在且不为零，设直线l的方程为$y=kx+2\ (k\neq 0)$，

点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立方程组，得$\begin{cases} y=kx+2 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$

消去y，得$(2k^2+1)x^2+8kx+4=0$.

由$\Delta>0$，得$k^2>\frac{1}{2}$，即$k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$k>\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………6 分

$x_1+x_2=\frac{-8k}{2k^2+1}$， $x_1x_2=\frac{4}{2k^2+1}$ ；

$y_1y_2=\frac{-4k^2+4}{2k^2+1}$. ……………8 分

$\because$以AB为直径的圆经过原点，$\therefore \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, $\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$.

$\therefore \frac{4}{2k^2+1}+\frac{-4k^2+4}{2k^2+1}=0$ ……………10 分

解得$k^2=2, k=\pm\sqrt{2}$.

所以，直线l的方程为$y=\pm\sqrt{2}x+2$. ……………12 分

21、解：（Ⅰ）当$a=2$，$\therefore$ $f(x)=-x^3+5x^2-3x-1$， $f'(x)=-3x^2+10x-3$，

$\therefore f(1)=0, f'(1)=4$， ……………2 分

$\therefore$函数$y=f(x)$的图像在点$(1,0)$处的切线方程为：

$y-0=4(x-1)$ ，即 $4x-y-4=0$； ……………4 分

（Ⅱ） $x\ge 1$时， $g(x)\ge f'(x)$恒成立等价于 $\dfrac{(x+1)(\ln x+1)}{x}\ge 2(2a+1)$恒成立，

令 $h(x)=\dfrac{(x+1)(\ln x+1)}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{x-\ln x}{x^2}$， ……………8 分

令 $\varphi(x)=x-\ln x$，则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

$\because x\ge 1$，$\therefore \varphi'(x)\ge 0$，$\therefore \varphi(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，……………10 分

$\therefore \varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=1>0$

$\therefore h'(x)>0$，$\therefore h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=2$，$\therefore 2(2a+1)\le 2$，$\therefore a\le 0$ ……………12 分

22. 解:（Ⅰ）椭圆中 $a=2,b=\sqrt{3}$,∴椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, ……2 分

∵直线 m 的斜率为 2，∴直线 n 的斜率为$-\dfrac{1}{2}$，

∴直线 n 的参数方程为$\begin{cases}x=1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t\\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$ （t 为参数）

（t 为参数不写扣一分，参数方程可以不写标准参数方程） ………..5 分

（Ⅱ）将直线 n 的参数方程为$\begin{cases}x=1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t\\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$ （t 为参数）代入椭圆的方程中

得到关于 t 的一元二次方程$16t^2-12\sqrt{5}t-45=0$. ………6 分

设t_1、t_2是 A、B 所对应的参数，则$t_1+t_2=\dfrac{3\sqrt{5}}{4};t_1\cdot t_2=-\dfrac{45}{16}<0$ ………8 分

根据参数的几何意义可知：$\left|\dfrac{1}{|FA|}-\dfrac{1}{|FB|}\right|=\left|\dfrac{|FB|-|FA|}{|FA|\cdot|FB|}\right|=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$ ………10 分

23.解:（Ⅰ） $g(x)=|x-2|-|x-1|$

$\because \left||x-2|-|x-1|\right| \le |(x-2)-(x-1)| = 1$ ………4 分

当且仅当$x \le 1$取等号，

$g(x)$的最大值$m = 1$. ………5 分

（Ⅱ）$\because m = 1, \therefore a + b = 1$，

$\therefore \therefore (a^3 + b^3) - (a^2 + b^2)^2 = (a^3 + b^3)(a+b) - (a^2 + b^2)^2$ ………………………7 分

$= (a^4 + b^4 + a^3b + ab^3) - (a^4 + b^4 + 2a^2b^2) = a^3b + ab^3 - 2a^2b^2$

$= ab(a^2 + b^2 - 2ab) = ab(a-b)^2$……………………………………………………9 分

$\because a > 0, b > 0$，$\therefore ab(a-b)^2 \ge 0$，$\therefore a^3 + b^3 \ge (a^2 + b^2)^2$. ………………………10 分