百校联盟 2018 年高考名师猜题保温金卷

理科数学　　参考答案

5月23日上午

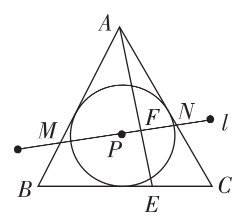
1. C 【解析】依题意，$S_9=99\Rightarrow 9a_5=99\Rightarrow a_5=11$，而 $a_7=17$，故数列 $\{a_n\}$ 的公差为 3.

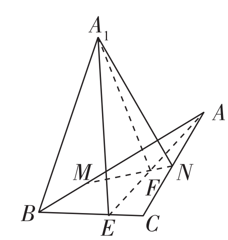
2. B 【解析】依题意，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+6x^2$，故 $f'(1)=7$，而 $f(1)=2$，故所求切线方程为 $y-2=7(x-1)$，即 $y=7x-5$.

3. C 【解析】依题意，$2S_{\triangle OMN}+3\tan\angle MON=0\Rightarrow|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|\sin\angle MON+\dfrac{3\sin\angle MON}{\cos\angle MON}=0$，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-3$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，故 $x_1x_2+y_1y_2=-3$，即 $\dfrac{(y_1y_2)^2}{4p^2}+y_1y_2=-3$，而 $y_1y_2=-p^2$，解得 $p=2$，故抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

4. -2016 【解析】$(2x-1)(1+x)^{2018}=(2x-1)(1+C_{2018}^1x+C_{2018}^2x^2+C_{2018}^3x^3+\cdots+C_{2018}^{2018}x^{2018})$，则 $a_1=2-C_{2018}^1=-2016$.

5. 1 【解析】画出图形如图所示，点 A 翻折到 A_1 的位置，因为 $l\perp A_1F$，$l\perp A_1E$，所以 $l\perp$ 平面 A_1EF，所以 A，E，F 三点共线. 在 $\triangle ABC$ 中，连接 AP 交直线 BC 于点 O，则 $AO\perp BC$，以 OC，OA 分别为 x，y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(0,\sqrt{3})$，$C(1,0)$，$P(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，设





直线 l 的方程为 $y=kx+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则直线 AE 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x+\sqrt{3}$，令 $y_E=0$，得 $x_E=\sqrt{3}k$，由点到直线的距离公式得 $|AF|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{1+k^2}}$，$|EF|=\dfrac{\sqrt{3}(3k^2+1)}{3\sqrt{1+k^2}}$. 又因为 $A_1E\perp$ 平面 $BCNM$，$EF\subset$ 平面 $BCNM$，所以 $A_1E\perp EF$，则在 $\text{Rt}\triangle A_1EF$ 中，$|A_1E|=\sqrt{|AF|^2-|EF|^2}=\sqrt{(\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{1+k^2}})^2-[\dfrac{\sqrt{3}(3k^2+1)}{3\sqrt{1+k^2}}]^2}=\sqrt{1-3k^2}\leqslant 1$，当 $k=0$ 时，$|A_1E|=1$.

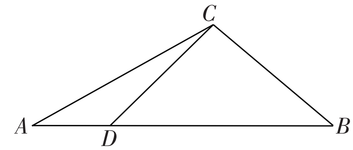
6.【解析】(Ⅰ)因为 $a=2$，$B=45°$，又 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\times BC\times BD\times\sin B$，

即 $\dfrac{1}{2}\times 2\times BD\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2$，所以 $BD=2\sqrt{2}$，

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得：

$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\times\cos B=4+8-2\times 2\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4$，故 $CD=2$.

(Ⅱ)依题意，$|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|$，



在△ACD中，由正弦定理得$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin A}$，

$\therefore \sin\angle ACD=\frac{AD\cdot\sin A}{CD}=\frac{AD\cdot\sin30^\circ}{CD}=\frac{AD}{2CD}$，

在△BCD中，由正弦定理得$\frac{DB}{\sin\angle DCB}=\frac{CD}{\sin B}$，

$\therefore \sin\angle DCB=\frac{DB\cdot\sin B}{CD}=\frac{DB\cdot\sin45^\circ}{CD}=\frac{\sqrt{2}DB}{2CD}$，

$\therefore \frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}=\frac{AD}{\sqrt{2}DB}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

7.【解析】(Ⅰ)因为直线 l：$\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，故$\sqrt{3}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-\sqrt{3}+1=0$，

即直线 l 的直角坐标方程：$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}+1=0$；

因为曲线 C：$\rho(1-\cos^2\theta)-2\cos\theta=0$，故 $\rho^2(1-\cos^2\theta)=2\rho\cos\theta$，

即曲线 C 的直角坐标方程：$y^2=2x$.

(Ⅱ)设直线l'的参数方程为$\begin{cases}x=2+\frac{1}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

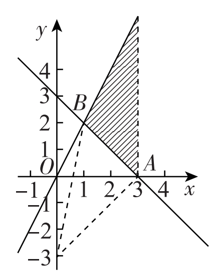
将其代入曲线 C 的直角坐标方程可得 $3t^2-4t-16=0$，

设点 P，Q 对应的参数分别为 t_1，t_2，

由一元二次方程的根与系数的关系知 $t_1t_2=-\frac{16}{3}$，$t_1+t_2=\frac{4}{3}$，

$\therefore |MP|^2+|MQ|^2=|t_1|^2+|t_2|^2=t_1{}^2+t_2{}^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=\frac{16}{9}+\frac{32}{3}=\frac{112}{9}$.

5月23日下午



1. C 【解析】依题意，$A=\{x|y=\lg(-x^2+5x+6)\}=\{x|-x^2+5x+6>0\}$ $=\{x|(x-6)(x+1)<0\}=\{x|-1<x<6\}$，故 $A\cap(\complement_UB)=(-1,3)$.

2. A 【解析】不等式组表示的平面区域如图中阴影部分，其中 $A(3,0)$，$B(1,2)$，$\frac{x}{y+3}$的几何意义是区域内的点与点 $P(0,-3)$连线的斜率的倒数. $\frac{1}{k_{PB}}\leqslant\frac{x}{y+3}<\frac{1}{k_{PA}}$，即$\frac{1}{5}\leqslant\frac{x}{y+3}<1$，故$\frac{x}{y+3}$的取值范围是$[\frac{1}{5},1)$.

3. A 【解析】根据两组数据得 $\bar{x}_{甲}=\frac{222+231+236+241+245}{5}=235$，$\bar{x}_{乙}=\frac{223+231+235+238+243}{5}=234$，因为 $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$，所以推荐乙参加运动会，①正确；又 $s_{甲}^2=\frac{(222-235)^2+(231-235)^2+(236-235)^2+(241-235)^2+(245-235)^2}{5}=64.4$，$s_{乙}^2=\frac{(223-234)^2+(231-234)^2+(235-234)^2+(238-234)^2+(243-234)^2}{5}=45.6$，由 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$

可知推荐乙参加运动会,③正确.

4. $\frac{3}{20}$ 【解析】所有的取法有:①黑红红红,②黄红红红,③红黑红红,④红黄红红,⑤红红黑红,⑥红红黄红,共 6 种情况,①的概率为$\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$,②的概率为$\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$,③的概率为$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$,④的概率为$\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$,⑤的概率为$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$,⑥的概率为$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$,所以红球恰好在第 4 次被全部取出的概率为$\frac{1}{30}\times3+\frac{1}{60}\times3=\frac{3}{20}$.

5. $(1,\sqrt{3}]$ 【解析】在$\triangle ABD$中,根据余弦定理,得 $c^2=AD^2+(\frac{a}{2})^2-2AD\cdot\frac{a}{2}\cos\angle ADB$,在$\triangle ACD$中,根据余弦定理,得 $b^2=AD^2+(\frac{a}{2})^2-2AD\cdot\frac{a}{2}\cos\angle ADC$,两式相加,得 $b^2+c^2=2AD^2+2$,所以 $AD^2=\frac{b^2+c^2-2}{2}$,代入 $b^2+c^2=4+bc$,得 $AD^2=\frac{bc+2}{2}$. 因为 $a=2$,所以 $4=b^2+c^2-2bc\cos A$,结合 $b^2+c^2=4+bc$,得 $\cos A=\frac{1}{2}$,所以 $A=60°$. 根据正弦定理,$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B$,$c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin C$,所以 $bc=\frac{16}{3}\sin B\sin C=\frac{16}{3}\sin B\sin(120°-B)=\frac{8}{3}\sin(2B-30°)+\frac{4}{3}$,因为 $0°<B<120°$,所以$-30°<2B-30°<210°$,所以$-\frac{1}{2}<\sin(2B-30°)\leqslant1$,所以 $0<\frac{8}{3}\sin(2B-30°)+\frac{4}{3}\leqslant4$,所以 $1<AD^2=\frac{bc+2}{2}\leqslant3$,所以 $1<AD\leqslant\sqrt{3}$,故 AD 的取值范围为$(1,\sqrt{3}]$.

6.【解析】(Ⅰ)取 DE 中点 O,连接 AO,CO,

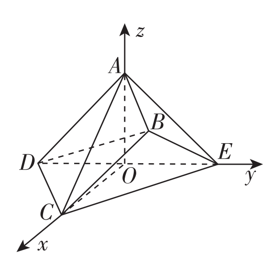
由 $CD=CE$,得 $DE\perp OC$,

因为 $AD=AE$,所以 $DE\perp AO$,

因为 $AO\cap CO=O$,所以 $DE\perp$平面 AOC,

因为 $AC\subset$平面 AOC,所以 $AC\perp DE$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,OC,OE,OA 两两垂直,



所以直线 AC 与平面 CDE 所成角为$\angle ACO$,

所以 $\tan\angle ACO=\frac{AO}{CO}=2$,

以 O 为坐标原点,直线 OC,OE,OA 分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

设 $OC=a(a>0)$,则 $OA=2a$,$OD=OE=a$,

所以 $O(0,0,0)$,$A(0,0,2a)$,$C(a,0,0)$,$D(0,-a,0)$,$E(0,a,0)$,

则$\overrightarrow{AC}=(a,0,-2a)$,$\overrightarrow{AE}=(0,a,-2a)$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(a,a,0)$,

设平面 ABC 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x_1a+y_1a=0,\\ x_1a-2z_1a=0,\end{cases}$

取 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(2,-2,1)$，

设平面 ABE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2a+y_2a=0,\\ y_2a-2z_2a=0,\end{cases}$

取 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-2,2,1)$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|2\times(-2)+(-2)\times 2+1\times 1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\dfrac{7}{9}$.

7.【解析】(Ⅰ) $f'(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-ax+2a=(x-2)(\mathrm{e}^x-a)$.

①若 $a\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)_{极小值}=f(2)=-\mathrm{e}^2+2a$，无极大值；

②若 $0<a<\mathrm{e}^2$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\ln a)$，$(2,+\infty)$，单调递减区间为 $(\ln a,2)$，此时 $f(x)_{极大值}=f(\ln a)=(\ln a-3)a-\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2+2a\ln a=-\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2+3a\ln a-3a$，$f(x)_{极小值}=f(2)=-\mathrm{e}^2+2a$；

③若 $a=\mathrm{e}^2$，则 $f'(x)\geqslant 0$，仅仅在 $x=2$ 处导数值等于零，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

④若 $a>\mathrm{e}^2$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,2)$，$(\ln a,+\infty)$，单调递减区间为 $(2,\ln a)$，

此时 $f(x)_{极大值}=f(2)=-\mathrm{e}^2+2a$，$f(x)_{极小值}=f(\ln a)=-\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2+3a\ln a-3a$.

(Ⅱ)①当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 无三个零点；

②当 $0<a<\mathrm{e}^2$ 时，由 $\begin{cases}f(x)_{极大值}=f(\ln a)=-\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2+3a\ln a-3a>0,\\ f(x)_{极小值}=f(2)=-\mathrm{e}^2+2a<0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}\mathrm{e}^{3-\sqrt{3}}<a<\mathrm{e}^{3+\sqrt{3}},\\ a<\dfrac{\mathrm{e}^2}{2},\end{cases}$ 又 $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\approx\mathrm{e}^{1.31}$，$\mathrm{e}^{3-\sqrt{3}}\approx\mathrm{e}^{1.27}$，所以 $\mathrm{e}^{3-\sqrt{3}}<a<\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$，

此时 $f(x)$ 在 $(\ln a,2)$ 上有一个零点，

因为 $f(3)=\dfrac{3a}{2}>0$，$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上有一个零点，

$f(0)=-3<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上有一个零点，

所以当 $\mathrm{e}^{3-\sqrt{3}}<a<\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ 时，$f(x)$ 有三个零点；

③当 $a=\mathrm{e}^2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无三个零点；

④当 $a>\mathrm{e}^2$ 时，$\begin{cases}f(x)_{极大值}=-\mathrm{e}^2+2a>0,\\ f(x)_{极小值}=-\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2+3a\ln a-3a<0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a>\dfrac{\mathrm{e}^2}{2},\\ a<\mathrm{e}^{3-\sqrt{3}}\text{ 或 }a>\mathrm{e}^{3+\sqrt{3}},\end{cases}$

所以 $a>\mathrm{e}^{3+\sqrt{3}}$，此时 $f(x)$ 在 $(2,\ln a)$ 上有一个零点，

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，$f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上有一个零点，又因为 $f(-1)=-\dfrac{4}{\mathrm{e}}-\dfrac{5}{2}a<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$

上有一个零点，所以当 $a>e^{3+\sqrt{3}}$ 时，$f(x)$ 有三个零点，

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(e^{3-\sqrt{3}},\frac{e^2}{2})\cup(e^{3+\sqrt{3}},+\infty)$.

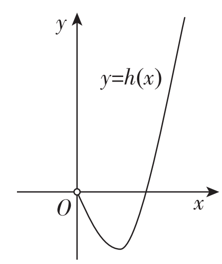
祝学业有成！

5月25日上午

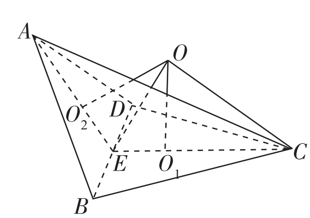
1. D 【解析】依题意，$(1+i)^4+(1-i)^4=(2i)^2+(-2i)^2=-8$，则 $z=\frac{(1+i)^4+(1-i)^4}{2-5i}=-\frac{8}{2-5i}=-\frac{8(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=-\frac{16}{29}-\frac{40}{29}i$，故复数 z 的虚部为 $-\frac{40}{29}$.

2. B 【解析】正三角形 ABC 的高为 3，点 P 到 AB 的距离为高的三分之一. 根据等积原理，点 P 到 $\triangle ABC$ 各边的距离之和等于三角形的高，即 $x+y+1=3$，所以 $x+y=2$，所以 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{2}(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})=\frac{1}{2}\times(5+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x})\geqslant\frac{1}{2}\times(5+4)=\frac{9}{2}$，即 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$，当且仅当 $y=2x$，即 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{4}{3}$ 时等号成立.

3. B 【解析】$h'(x)=2ex+4ex\ln x$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$，可知 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$ 上单调递增，$h(x)_{\min}=h(\frac{1}{\sqrt{e}})=-1$. 而在 $(0,+\infty)$ 上，当 $x\to0$ 时 $h(x)\to0$；当 $x\to\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，因此 $y=h(x)$ 的简图如图所示. 方程 $f(x)=\frac{a}{3}$，即 $h(x)=-2a^2+\frac{a}{3}+\frac{2}{3}(x>0)$①，及 $-h(-x)=2a^2+\frac{a}{3}-\frac{2}{3}(x<0)$②，要满足方程 $f(x)=\frac{a}{3}$ 有 4 个不同实根，必须使方程①，②各有两个不同的实根. 对于方程①，解不等式 $-1<-2a^2+\frac{a}{3}+\frac{2}{3}<0$，得 $-\frac{5}{6}<a<-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}<a<1$，取 $A=(\frac{2}{3},1)$，对于方程②，解不等式 $0<2a^2+\frac{a}{3}-\frac{2}{3}<1$，得 $-1<a<-\frac{2}{3}$ 或 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{6}$，取 $B=(\frac{1}{2},\frac{5}{6})$，所以实数 a 的范围是 $A\cap B=(\frac{2}{3},\frac{5}{6})$.

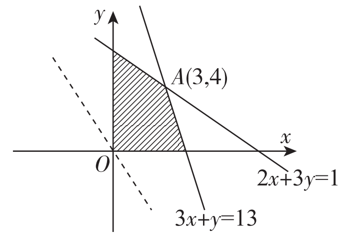


4. $\frac{28\pi}{3}$ 【解析】取 BD 的中点 E，连接 AE,CE，在 $\triangle ACE$ 中，$AE=CE=\sqrt{3}$，$AC=3$，可得 $\angle AEC=120°$. 四面体外接球的球心必在过各个面三角形外接圆圆心且与各个面垂直的直线上，设 $\triangle CBD$，$\triangle ABD$ 外接圆的圆心分别为 O_1,O_2，作 $OO_1\perp$ 平面 CBD，$OO_2\perp$ 平面 ABD，则 O 即为四面体 $ABCD$ 外接球的球心，连接 OE，如图. 在 $Rt\triangle OO_1E$ 中，$O_1E=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle OEO_1=60°$，所以 $OO_1=1$. 在 $Rt\triangle OO_1C$ 中，$O_1C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $OC^2=1^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=\frac{7}{3}$，



所以四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为 $4\pi\times\frac{7}{3}=\frac{28\pi}{3}$.

5. 17000 【解析】设每天生产甲产品 x 件，乙产品 y 件，则 x,y 满足 $\begin{cases}2x+3y\leqslant 18,\\3x+y\leqslant 13,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0.\end{cases}$ 如图，目标函数 $z=3000x+2000y$. 根据约束



条件表示的平面区域和目标函数的几何意义可知，目标函数在点(3,4)处取得最大值，即 $z_{\max}=3000\times 3+2000\times 4=17000$(元).

6.【解析】(Ⅰ)易知数列$\{a_n\}$的公比不为1，则 $\frac{S_6}{S_3}=\frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}}=1+q^3=9$，解得 $q=2$，

而 $a_2,a_3,12$ 成等差数列，则 $2a_3=a_2+12$，解得 $a_2=4$，故 $a_n=2^n$，$S_n=2^{n+1}-2$.

(Ⅱ)当 $n=1$ 时，$b_1=T_1=\frac{3-1}{2}=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=T_n-T_{n-1}=\frac{3n-n^2}{2}-\frac{3(n-1)-(n-1)^2}{2}=2-n$，

综上所述，$b_n=2-n$，

$Q_n=\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{-1}{2^3}+\cdots+\frac{2-n}{2^n}$，①

两边同乘以 $\frac{1}{2}$ 得 $\frac{1}{2}Q_n=\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{-1}{2^4}+\cdots+\frac{2-n}{2^{n+1}}$，②

①－②得，

$(1-\frac{1}{2})Q_n=\frac{1}{2}+\frac{-1}{2^2}+\frac{-1}{2^3}+\cdots+\frac{-1}{2^n}-\frac{2-n}{2^{n+1}}$，

所以 $\frac{1}{2}Q_n=\frac{1}{2}+\frac{\frac{-1}{2^2}-\frac{-1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2-n}{2^{n+1}}$，化简得 $Q_n=\frac{n}{2^n}$.

7.【解析】(Ⅰ)根据已知，得 $(\frac{c}{a})^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，得 $a^2=2b^2$，

又 $\frac{2}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$，解得 $a^2=8,b^2=4$.

所以椭圆 Ω 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，$F(2,0)$，因为直线 l 的倾斜角不为0，设直线 l 的方程为 $x=ty+2$，

代入椭圆方程，得 $(t^2+2)y^2+4ty-4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{4t}{t^2+2}$，$y_1y_2=-\frac{4}{t^2+2}$.

根据椭圆的对称性可知，O 为 AC 的中点，

所以 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle OAB}=|OF|\cdot|y_1-y_2|=2|y_1-y_2|=2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=2\sqrt{(-\frac{4t}{t^2+2})^2+\frac{16}{t^2+2}}=\frac{8\sqrt{2}\sqrt{t^2+1}}{t^2+2}\leqslant\frac{8\sqrt{2}\times\frac{1+(t^2+1)}{2}}{t^2+2}=4\sqrt{2}$,

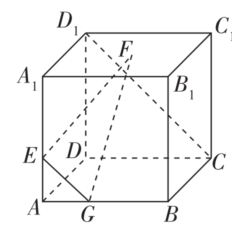
当且仅当 $1=t^2+1$,即 $t=0$ 时取等号.

所以$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $4\sqrt{2}$.

5月25日下午

1. D 【解析】假设甲猜对,即 D 或 E 答对了,则乙也猜对,相互矛盾;假设乙猜对,即 C 没有答对,又丙猜错,则是 D 或 E 答对的,此时甲也猜对,相互矛盾;假设丙猜对,即 A,B,F 当中必有一人答对,此时乙也猜对;假设丁猜对,即 D,E,F 都不可能答对,甲、乙、丙均猜错,符合题意,故猜对的是丁.

2. A 【解析】不妨设 $AB=3$,取 AB 边上靠近 A 的三等分点 G,则 $EG=\sqrt{2}$,$EF=\sqrt{2^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$,$FG=\sqrt{3^2+\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{46}}{2}$,故 $\cos\angle FEG=\frac{EF^2+EG^2-FG^2}{2\cdot EF\cdot EG}=-\frac{\sqrt{17}}{34}$,则异面直角 EF 与 CD_1 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{17}}{34}$.



3. C 【解析】$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\cos^2\omega x=\sqrt{3}\sin2\omega x+\cos2\omega x+1=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})+1$,

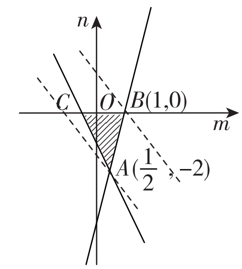
由 $2\omega x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{3}}{2\omega}(k\in\mathbf{Z})$,即为函数 $f(x)$图象的对称轴方程,根据题意只要$\frac{k\pi+\frac{\pi}{3}}{2\omega}\leqslant\frac{\pi}{2}$且$\frac{(k+1)\pi+\frac{\pi}{3}}{2\omega}\geqslant\pi$ 即可,即 $\omega\geqslant k+\frac{1}{3}$且 $\omega\leqslant\frac{k+\frac{4}{3}}{2}$,该不等式组有解,必须 $k+\frac{1}{3}\leqslant\frac{k+\frac{4}{3}}{2}$,即 $k\leqslant\frac{2}{3}$,又 $\omega>0$,故$\frac{k+\frac{4}{3}}{2}>0$,即 $k>-\frac{4}{3}$,即$-\frac{4}{3}<k\leqslant\frac{2}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $k=-1$ 或 $k=0$,即 $0<\omega\leqslant\frac{1}{6}$或$\frac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{2}{3}$,所以 ω 的取值范围是$(0,\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$,$\omega$ 的最大值为$\frac{2}{3}$.

4. $\frac{4}{5}$ 【解析】向量 $\boldsymbol{a}=(2x+1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,1-x)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $1\times(2x+1)+1\times(1-x)=0$,解得 $x=-2$,所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-5,5)$,$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-1,7)$,由数量积公式得 $\cos\theta=\frac{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})}{|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|}=\frac{40}{\sqrt{50}\times\sqrt{50}}=\frac{4}{5}$.

5. $\frac{6}{7}$ 【解析】不妨设点 P,Q 分别在第一象限和第四象限,则 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,而抛物线 C:$y^2=4x$;因为$|QF|=3$,故 $y_2=-2\sqrt{2}$,联立$\begin{cases}x-my-\sqrt{5}=0,\\y^2=4x,\end{cases}$得 $y^2-4my-4\sqrt{5}=0$,故 y_1y_2

$=-4\sqrt{5}$，所以 $y_1=\sqrt{10}$，故 $x_1=\dfrac{5}{2}$，过 P 点作 PP' 垂直于准线 $x=-1$，垂足为 P'，过 Q 点作 QQ' 垂直于准线 $x=-1$，垂足为 Q'，易知 $\triangle RQQ' \backsim \triangle RPP'$，故 $\dfrac{S_{\triangle QRF}}{S_{\triangle PRF}}=\dfrac{|QQ'|}{|PP'|}=\dfrac{3}{\frac{7}{2}}=\dfrac{6}{7}$.

6. $[0,2)$【解析】$f'(x)=x^2-2mx+n$，依题意 $\begin{cases}f'(-1)>0\\f'(0)<0\\f'(2)>0\end{cases}$ 即



$\begin{cases}2m+n+1>0,\\n<0,\\-4m+n+4>0,\end{cases}$ 在坐标系中画出相应的区域，设 $z=m+n+1$，则 $z\in$ $(-\dfrac{1}{2},2)$，所以 $|z|=|m+n+1|\in[0,2)$.

7.【解析】(Ⅰ) 依题意，$n=6$，$\overline{x}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}x_i=26$，$\overline{y}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}y_i=33$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=557$，

$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2=84$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{557}{84}\approx 6.6$，$\hat{a}\approx 33-6.6\times 26=-138.6$，

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=6.6x-138.6$.

(Ⅱ)依题意，当 $x=36$ 时，$\hat{y}=6.6\times 36-138.6=99$，所以电风扇的日销售量为 99 个.

(Ⅲ) 利用所给数据，$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2=236.64$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2=3930$ 得，线性回归方程 $\hat{y}=6.6x-138.6$ 的相关指数 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2}=1-\dfrac{236.64}{3930}\approx 1-0.0602=0.9398<0.95$，

故(Ⅰ)中的计算模型不是良好模型.

8.【解析】(Ⅰ)依题意，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+m+2x=\dfrac{2x^2+mx+1}{x}$，

对于二次函数 $y=2x^2+mx+1$，其中 $\Delta=m^2-8$，

若 $\Delta\leqslant 0$，即 $-2\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，$y=2x^2+mx+1\geqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

若 $\Delta>0$，当 $m>2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $m<-2\sqrt{2}$ 时，令 $f(x)=0$，解得 $x=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2-8}}{4}$，故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{-m-\sqrt{m^2-8}}{4})$ 和 $(\dfrac{-m+\sqrt{m^2-8}}{4},+\infty)$ 上单调递增，在 $(\dfrac{-m-\sqrt{m^2-8}}{4},\dfrac{-m+\sqrt{m^2-8}}{4})$ 上单调递减.

(Ⅱ)依题意，$e^x-f(x)+mx+x^2=0$，令 $g(x)=e^x-f(x)+mx+x^2=e^x-\ln x-2-m$，

函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $m\leqslant 0$ 时，$g(x)=e^x-\ln x-2-m\geqslant x+1-\ln x-2-m>-m\geqslant 0$，故 $g(x)$ 无零点；

当 $m=1$ 时，$g(x)=e^x-\ln x-3$，$g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，

$\because g'(1)=e-1>0$，$g'(\dfrac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，且 $g'(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

$\therefore g'(x)$ 有唯一的零点 $x_0\in(\dfrac{1}{2},1)$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)$ 的最小值为 $g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-3$；

由 x_0 为 $g'(x)$ 的零点知，$e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，于是 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，$x_0=-\ln x_0$，

$\therefore g(x)$ 的最小值 $g(x_0)=x_0+\dfrac{1}{x_0}-3$，

由 $x_0\in(\dfrac{1}{2},1)$ 知，$x_0+\dfrac{1}{x_0}-3<0$，即 $g(x_0)<0$，

又 $g(2)=e^2-\ln 2-3>0$，$g(\dfrac{1}{9})=e^{\frac{1}{9}}+2\ln 3-3>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(\dfrac{1}{9},x_0)$ 上有一个零点，在 $(x_0,2)$ 上有一个零点，$\therefore g(x)$ 有两个零点，

综上所述，整数 m 的最小值为 1.

5月27日上午

1. C 【解析】设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 θ，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow|\cos\theta|=1$，$\theta=0^\circ$ 或 $\theta=180^\circ$.

2. A 【解析】程序框图的功能是计算 $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$，输出结果是 $\dfrac{2017}{2018}$，说明当 $n=2017$ 时结束循环，所以判断框中应填入 $n\geqslant2017$?.

3. B 【解析】若 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[0,t]$ 上是增函数，若 $f(x)$ 在 $[0,t]$ 上的值域为 $[0,\dfrac{t}{2}]$，则 $f(t)=\dfrac{t}{2}$，设 $g(t)=\sin t-\dfrac{t}{2}$，则 $g'(t)=\cos t-\dfrac{1}{2}$，所以 $g(t)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{3})$ 上是增函数，在 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$ 上是减函数，又 $g(0)=0$，$g(\dfrac{\pi}{2})>0$，所以方程 $g(t)=\sin t-\dfrac{t}{2}=0$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上没有实根，又当 $t\geqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,t]$ 上的值域为 $[0,1]$，所以 $t=2$ 满足条件.

4. 1000 【解析】依题意，任意投掷一点，落在阴影部分内的概率为 $1-\dfrac{\pi\times2^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2\times2}\approx0.1$，故落在阴影部分内的点约有 1000 个.

5. 2 【解析】由题意可知，$|PM|$，$|PN|$ 为点 $P(x_0,y_0)$ 到渐近线 $\sqrt{m}x\pm\sqrt{m+1}y=0$ 的距离，所以 $|PM|\cdot|PN|=\dfrac{|\sqrt{m}x_0+\sqrt{m+1}y_0|}{\sqrt{m+m+1}}\cdot\dfrac{|\sqrt{m}x_0-\sqrt{m+1}y_0|}{\sqrt{m+m+1}}=\dfrac{|mx_0^2-(m+1)y_0^2|}{2m+1}=$

$\dfrac{m(m+1)}{2m+1}=\dfrac{6}{5}$,解得 $m=2$.

6.【解析】(Ⅰ)根据题意,以 AC 为直径的圆经过点 B,D,所以$\angle ABC=\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$,

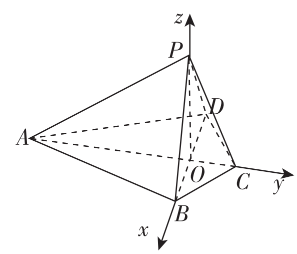
又$\angle ACB=\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}$,所以 $BC=CD$,所以 $BD\perp AC$,

又$\triangle PCB$ 与$\triangle PCD$ 全等,所以 $PD=PB$,又 $OB=OD$,所以 $PO\perp BD$,

又 $PO\cap AC=O$,所以 $BD\perp$平面 APC,同时 $BD\subset$平面 $ABCD$,

所以平面 $ABCD\perp$平面 APC.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,$BD\perp$平面 APC,



所以 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}BD\cdot S_{\triangle APC}=\dfrac{1}{3}BD\cdot\dfrac{1}{2}AC\cdot h$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\times 4\cdot h=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cdot h\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cdot PO=4$,

所以 $PO=\sqrt{3}$,$PO\perp AC$.

又平面 $ABCD\cap$平面 $APC=AC$,所以 $PO\perp$平面 $ABCD$,

以 O 为坐标原点,以 OB,OC,OP 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

则可得 $B(\sqrt{3},0,0)$,$C(0,1,0)$,$A(0,-3,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,

则$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}))$,$\overrightarrow{BA}=(-\sqrt{3},-3,0)$,

设平面 ABP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0,\\ -\sqrt{3}x-3y=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)$,同理可求平面 CBP 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$,

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{7}{3}}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{105}}{35}$,

$\because$二面角 $A-BP-C$ 的平面角为钝角,

$\therefore$二面角 $A-BP-C$ 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{105}}{35}$.

7.【解析】(Ⅰ)$f(x)=2|x|+|x-3|=\begin{cases}-3x+3,x\leqslant 0,\\ x+3,0<x\leqslant 3,\\ 3x-3,x>3.\end{cases}$

由$-3x+3\leqslant 6$,解得 $x\geqslant -1$,此时$-1\leqslant x\leqslant 0$;

由 $x+3\leqslant 6$,解得 $x\leqslant 3$,此时 $0<x\leqslant 3$;

由 $3x-3\leqslant 6$,解得 $x\leqslant 3$,此时不等式无解.

综上,所求不等式的解集为$[-1,3]$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减,在$[0,+\infty)$上单调递增,

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=3$.即 $a+2b+4c=3$.

所以$\frac{4}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}(a+2b+4c)(\frac{4}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c})$

$\geqslant\frac{1}{3}(\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{4}{a}}+\sqrt{2b}\cdot\sqrt{\frac{2}{b}}+\sqrt{4c}\cdot\sqrt{\frac{1}{c}})^2=\frac{1}{3}\times(2+2+2)^2=12.$

等号当且仅当$\frac{a}{\frac{4}{a}}=\frac{2b}{\frac{2}{b}}=\frac{4c}{\frac{1}{c}}$,即 $a:b:c=4:2:1$ 时成立,即 $a=1,b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{4}$时成立,

所以$\frac{4}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$的最小值为 12.

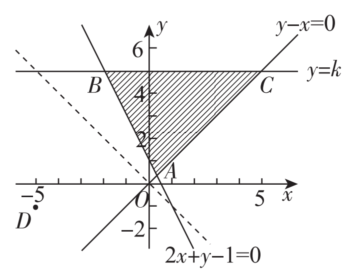
5月27日下午

1. C 【解析】依题意,所求几何体的体积 $V=\frac{4}{3}\pi\times1^3+\frac{\pi\times1^2\times3}{2}=\frac{17}{6}\pi$,表面积 $S=4\pi\times1^2+\pi\times1^2+\pi\times1\times3+3\times2=8\pi+6$.

2. D 【解析】把数列$\{a_n\}$分组如下:(1),(1,1),(1,2,1),(1,3,3,1),(1,4,6,4,1),…,则第 k 组所有项的和为 2^{k-1},前 k 组所有项的和为 $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$,且前 k 组共有$\frac{k(k+1)}{2}$项,即 $S_{\frac{k(k+1)}{2}}=2^k-1$,取 $k=12$,得 $S_{78}=2^{12}-1=4095$,又 $a_{79}+a_{80}=C_{12}^0+C_{12}^1=13$,所以 $S_{80}=4108$.

3. C 【解析】若 $0<a<1$,则 $f(x)$在$(-\infty,1]$上是减函数,在$(1,+\infty)$上是增函数,所以当 $f(1)\leqslant|1-a|+1$,即 $2a\leqslant2-a$ 时,$f(x)$有最小值,所以 $0<a\leqslant\frac{2}{3}$;若 $a>1$,则 $f(x)$在$(-\infty,1]$上是增函数,且当 $x\in(-\infty,1]$时,$f(x)>a$,$x\in(1,+\infty)$时,$f(x)\geqslant f(a)=1$,所以 $a>1$ 时,$f(x)$有最小值 1,综上,实数 a 的取值范围为$(0,\frac{2}{3}]\cup(1,+\infty)$.

4. $[\frac{1}{4},2]$ 【解析】依题意,该平面区域是一个以 $A(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$,$C(k,k)$,$B(\frac{1-k}{2},k)$为顶点的三角形区域,则当目标函数 $z=x+y$ 过点 $C(k,k)$时,$z=x+y$ 取得最大值为 10,解得 $k=5$,而$\frac{y+1}{x+5}$表示平面区域内的点与点 $D(-5,-1)$之间连线的斜率,故 $k_{AD}\leqslant\frac{y+1}{x+5}\leqslant k_{BD}$,即$\frac{1}{4}\leqslant\frac{y+1}{x+5}\leqslant2$.



5. $[1,2)$【解析】依题意,$a^2+b^2-c^2=\frac{abc}{a\cos B+b\cos A}$,即 $a^2+b^2-c^2=ab$,而 $c^2=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab\geqslant\frac{1}{4}(a+b)^2$,故 $c\geqslant1$,当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立,又 $c<a+b=2$,故 $c\in[1,2)$.

6.【解析】(Ⅰ)依题意,甲舞团日宣传时间的中位数为 $20+\frac{0.5-0.1-0.2}{0.03}=26\frac{2}{3}$;

乙舞团日宣传时间的中位数为 $30+\frac{0.5-0.05-0.2}{0.035}=37\frac{1}{7}$.

(Ⅱ)依题意，$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(50\times15-30\times5)^2}{80\times20\times55\times45}\approx9.091$.

$\because 9.091>6.635$，且 $P(K^2\geqslant6.635)=0.010$，

所以在犯错误的概率不超过 0.010 的前提下可以认为性别与对舞团的喜好有关.

(Ⅲ)依题意，X 的可能取值为 0，1，2，3，4，

故 $P(X=0)=\dfrac{C_{15}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{91}{323}$，$P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_{15}^3}{C_{20}^4}=\dfrac{455}{969}$，$P(X=2)=\dfrac{C_5^2C_{15}^2}{C_{20}^4}=\dfrac{70}{323}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_5^3C_{15}^1}{C_{20}^4}=\dfrac{10}{323}$，$P(X=4)=\dfrac{C_5^4}{C_{20}^4}=\dfrac{1}{969}$，

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{91}{323}$	$\dfrac{455}{969}$	$\dfrac{70}{323}$	$\dfrac{10}{323}$	$\dfrac{1}{969}$

故 $E(X)=0\times\dfrac{91}{323}+1\times\dfrac{455}{969}+2\times\dfrac{70}{323}+3\times\dfrac{10}{323}+4\times\dfrac{1}{969}=1$.

7.【解析】(Ⅰ)设 $M(x_1,y_1)$，由点 $A(0,-2)$关于点 $B(1,0)$的对称点为 M，

可得$\dfrac{x_1}{2}=1$，$\dfrac{-2+y_1}{2}=0$，所以$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=2,\end{cases}$即 $M(2,2)$，

因为点 M 在抛物线 C 上，所以 $2^2=2p\times2$，

解得 $p=1$，故抛物线 C 的方程为 $x^2=2y$.

因为直线 AB 过点 $A(0,-2)$，点 $B(1,0)$，

所以直线 AB 方程为 $y=2x-2$，

把 $y=2x-2$ 与 $x^2=2y$ 联立得 $x^2-4x+4=0$，

因为 $\Delta=(-4)^2-4\times4=0$，所以直线 AB 与抛物线 C 相切.

(Ⅱ)因为抛物线 C 的准线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}$，

与方程 $y=2x-2$ 联立，得 $P(\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{2})$，

则直线 MF 斜率 $k_1=\dfrac{2-\dfrac{1}{2}}{2-0}=\dfrac{3}{4}$，

直线 PF 斜率 $k_2=\dfrac{\dfrac{1}{2}-(-\dfrac{1}{2})}{0-\dfrac{3}{4}}=-\dfrac{4}{3}$，

由 $k_1k_2=-1$，可得 $MF\perp PF$，

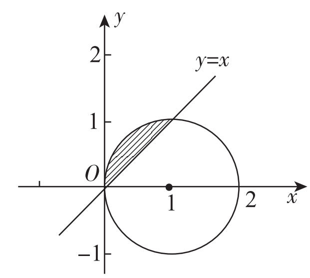
所以，以线段 PM 为直径的圆过点 F.

祝学业有成!

1.C 【解析】由命题“$p\wedge q$”是真命题知 p 与 q 均为真命题,由 p 为真,可知 $0<a<1$,由 q 为真,知 $a\geqslant\frac{1}{2}$,综上知$\frac{1}{2}\leqslant a<1$.

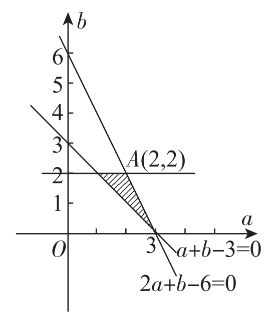
2.C 【解析】令 $x=0$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6=1$,令 $x=-2$,得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_6=729$,两式相加得 $a_0+a_2+a_4+a_6=365$,令 $x=-1$,得 $a_0=1$,所以 $a_2+a_4+a_6=364$.

3.D 【解析】已知点 $A(1,0)$,点 $B(x,y)$,因为 $|\overrightarrow{AB}|\leqslant1$,所以有 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}\leqslant1$,其表示圆心在$(1,0)$,半径为 1 的圆面,如图所示. 而 $2^{y-x}\geqslant1$,即 $y-x\geqslant0$,所以 $y\geqslant x$. 表示的是图中阴影部分.



$\because S_{圆}=\pi\times1^2=\pi$,$S_{阴影}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times1^2=\frac{\pi-2}{4}$,故所求事件的概率 $P=\frac{S_{阴影}}{S_{圆}}=\frac{\frac{\pi-2}{4}}{\pi}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$.

4.2 【解析】由于函数 $f(x)=x^2-ax+2-b$ 的两个零点分别在区间$[0,1)$与$(1,2]$上,所以有$\begin{cases}f(0)\geqslant0,\\f(1)<0,\\f(2)\geqslant0,\end{cases}$即$\begin{cases}b\leqslant2,\\a+b-3>0,\\2a+b-6\leqslant0,\end{cases}$ 如图所示,目标函数 $z=ma+nb(m>0,n>0$,且 $m<2n)$取得最大值 4 时,最优解为 $A(2,2)$. 于是有 $m+n=2$,而$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})(m+n)=1+\frac{1}{2}\times(\frac{n}{m}+\frac{m}{n})\geqslant2$,当且仅当 $m=n=1$ 时,取到最小值 2.



5.$\sqrt{5}$ 【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$F_1(-c,0)$,由题意知直线 AB:$y=x+c$,由$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BF_1}$可知点 B 在点 A,F_1 之间,且由三角形相似得$\frac{y_2}{y_1}=\frac{|BF_1|}{|AF_1|}=\frac{1}{3}$①,由 $y=-\frac{b}{a}x$ 与 $y=x+c$ 联立得 $y_2=\frac{bc}{b+a}$,由 $y=\frac{b}{a}x$ 与 $y=x+c$ 联立得 $y_1=\frac{bc}{b-a}$,代入①中得$\frac{b-a}{b+a}=\frac{1}{3}$,整理得 $b=2a$,所以 $c=\sqrt{5}a$,$e=\sqrt{5}$.

6.【解析】(Ⅰ)$\because \boldsymbol{m}=(\frac{5}{2}b-4c,\sqrt{5}c-\sqrt{5}a)$,$\boldsymbol{n}=(2b,\sqrt{5}c+\sqrt{5}a)$,且 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,

$\therefore \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=5b^2-8bc+5c^2-5a^2=0$,即 $b^2+c^2-a^2=\frac{8bc}{5}$,

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4}{5}$.

$\because A$ 是$\triangle ABC$ 的内角,$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{3}{5}$,所以 $\tan A=\frac{3}{4}$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $b^2+c^2-a^2=\frac{8bc}{5}$,$\therefore \frac{8bc}{5}=b^2+c^2-a^2\geqslant2bc-a^2$.

又$\because a=3\sqrt{2}$,$\therefore bc\leqslant45$.

$\because \triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3bc}{10}\leqslant\frac{27}{2}$（当 $b=c=3\sqrt{5}$ 时，等号成立），

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 S 的最大值为 $\frac{27}{2}$.

7.【解析】（Ⅰ）曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），

直线 l 的普通方程为 $x+y-3=0$.

（Ⅱ）曲线 C 上任意一点 $P(3\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$ 到直线 l 的距离为

$d=\frac{\sqrt{2}}{2}|3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-3|=\sqrt{6}|\sin(\theta+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}|$，

则 $|PA|=\frac{d}{\sin60^\circ}=2\sqrt{2}|\sin(\theta+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}|$.

当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=-1$ 时，$|PA|$ 取得最大值，最大值为 $\sqrt{6}+2\sqrt{2}$，

当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$|PA|$ 取得最小值，最小值为 0.

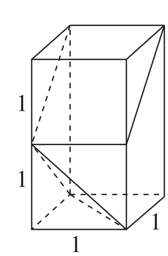
5月29日下午

1. B 【解析】$\because f(x)=2xf'(1)+\ln x$，$\therefore f'(x)=2f'(1)+\frac{1}{x}$，$\therefore f'(1)=2f'(1)+1$，$\therefore f'(1)=-1$. 而 $f(1)=2f'(1)+\ln1=-2$，于是函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+2=-(x-1)$，即 $x+y+1=0$.

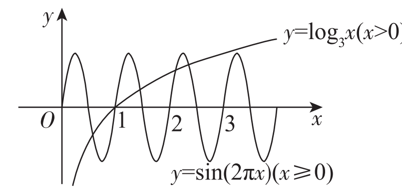
2. B 【解析】过原点 O 作 OP 垂直于直线 $x+2y+10=0$，垂足为点 P，过点 P 作圆 O 的切线 PA，切点为 A，连接 OA，易知此时 $|PA|$ 的值最小. 由点到直线的距离公式，得 $|OP|=\frac{|1\times0+2\times0+10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$. 又 $|OA|=2$，所以 $|PA|=\sqrt{|OP|^2-|OA|^2}=4$.

3. A 【解析】由图象可得 $A=\sqrt{2}$，最小正周期 $T=4\times(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3})=\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$. 又 $f(\frac{7\pi}{12})=\sqrt{2}\sin(\frac{7\pi}{6}+\varphi)=-\sqrt{2}$，解得 $\varphi=-\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $k=1$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$，则 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$. 而 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x-\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{3\pi}{8})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin[2(x+\frac{\pi}{48})+\frac{\pi}{3}]$，故要由函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象得到函数 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x-\frac{\pi}{8})$ 的图象，则需使函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象上所有点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，再沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{48}$ 个单位.

4. $\frac{4}{3}$ 【解析】该几何体的直观图如图所示，$V=1\times1\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1-\frac{1}{2}\times1\times1\times1=2-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$.



5.5 【解析】画出函数 $y=\log_3 x(x>0)$ 与 $y=\sin(2\pi x)(x\geqslant 0)$ 的图象知，它们有 5 个交点，作这 5 个点关于原点的对称点，由于 $y=\sin(2\pi x)$ 是奇函数，所以这些对称点在函数 $y=\sin(2\pi x)(x\leqslant 0)$ 的图象上，故 $f(x)$ 的图象有 5 对关于原点对称的点.



6.$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$【解析】由 $|\sin2A\sin2B\sin2C|=\sin2A\sin2B\sin2C$ 得 $\sin A\sin B\sin C\cos A\cos B\cos C\geqslant 0$，在三角形中，$\sin A>0$，$\sin B>0$，$\sin C>0$，所以 $\cos A\cos B\cos C\geqslant 0$，①若 $\cos A\cos B\cos C>0$，则只有 $\cos A>0$，$\cos B>0$，$\cos C>0$，因此$\triangle ABC$ 为锐角三角形，于是 $A+B>\frac{\pi}{2}$，$A>\frac{\pi}{2}-B$，$\sin A>\sin(\frac{\pi}{2}-B)$，即 $\sin A>\cos B$，直线 $x\sin A-y\cos B=0$ 的斜率 $k=\frac{\sin A}{\cos B}>1$，直线 $x\sin A-y\cos B=0$ 的倾斜角 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$；②若 $\cos A\cos B\cos C=0$，则 $\cos A=0$ 或 $\cos B=0$ 或 $\cos C=0$，当 $\cos A=0$ 时，$A=90°$，$k=\frac{\sin A}{\cos B}=\frac{1}{\cos B}>1$；当 $\cos B=0$ 时，$B=90°$，k 不存在，直线 $x\sin A-y\cos B=0$ 的倾斜角 α 为$\frac{\pi}{2}$；当 $\cos C=0$ 时，$C=90°$，$k=1$，$\alpha=\frac{\pi}{4}$. 综上所述，$\alpha\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$.

7.【解析】(Ⅰ)事件 A 表示：甲在一次抽奖活动中获得 200 元购物券，则 $P(A)=\frac{10}{5\times5}=\frac{2}{5}$；甲在四次抽奖活动中，只要事件 A 发生次数不少于 1，则购物券总金额不少于 500 元. 四次抽奖活动事件 A 均没有发生的概率为$(1-\frac{2}{5})^4=\frac{81}{625}$，

即甲在四次抽奖活动中获得购物券总金额少于 500 元的概率为$\frac{81}{625}$，

则甲在四次抽奖活动中获得购物券总金额不少于 500 元的概率为 $1-\frac{81}{625}=\frac{544}{625}$.

(Ⅱ)X 的所有可能取值为：400，500，600，700，800.

$P(X=400)=\frac{81}{625}$；$P(X=500)=C_4^1(\frac{2}{5})^1\times(\frac{3}{5})^3=\frac{216}{625}$；

$P(X=600)=C_4^2(\frac{2}{5})^2\times(\frac{3}{5})^2=\frac{216}{625}$；$P(X=700)=C_4^3(\frac{2}{5})^3\times(\frac{3}{5})^1=\frac{96}{625}$；

$P(X=800)=(\frac{2}{5})^4=\frac{16}{625}$.

所以 X 的分布列为：

X	400	500	600	700	800
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

$E(X)=400\times\frac{81}{625}+500\times\frac{216}{625}+600\times\frac{216}{625}+700\times\frac{96}{625}+800\times\frac{16}{625}=560$.

8.【解析】(Ⅰ)由 $f(e-1)=a(e-1)+be$，得 $e-1+a(e-1)+be-e-2b=0$，

又 $f'(x)=a+b\ln(x+1)+b$，所以 $f'(e-1)=a+b+b=-1$，

解得 $a=1,b=-1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$，

由 $f(x)\geqslant kx^2$，得 $kx^2-x+(x+1)\ln(x+1)\leqslant 0$ 在 $x\geqslant 0$ 时恒成立.

设 $g(x)=kx^2-x+(x+1)\ln(x+1)(x\geqslant 0)$，显然 $g(0)=0$，

又 $g'(x)=2kx+\ln(x+1)$，设 $h(x)=g'(x)=2kx+\ln(x+1)$，

则 $h'(x)=2k+\dfrac{1}{x+1}$.

当 $2k\geqslant 0$ 时，$h'(x)>0$，故 $y=h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，

故 $y=g(x)$ 也单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)$，与题设矛盾；

当 $2k<0$ 时，令 $h'(x)=0$，可得 $x=-1-\dfrac{1}{2k}$，

①当 $k\leqslant -\dfrac{1}{2}$ 时，$-1-\dfrac{1}{2k}\leqslant 0$，在 $x\geqslant 0$ 上，$h'(x)\leqslant 0$，故 $y=h(x)$ 单调递减，

又 $h(x)\leqslant h(0)=0$，故 $y=g(x)$ 也单调递减，所以 $g(x)\leqslant g(0)=0$ 恒成立；

②当 $-\dfrac{1}{2}<k<0$ 时，$-1-\dfrac{1}{2k}>0$，当 $x\in(0,-1-\dfrac{1}{2k})$ 时，$h'(x)>0$，

当 $x\in(-1-\dfrac{1}{2k},+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$ 在 $(0,-1-\dfrac{1}{2k})$ 上单调递增，

在 $(-1-\dfrac{1}{2k},+\infty)$ 上单调递减，又 $h(0)=0$，

所以当 $x\in(0,-1-\dfrac{1}{2k})$ 时，$h(x)>h(0)=0$，故在 $(0,-1-\dfrac{1}{2k})$ 上 $y=g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，与题设矛盾.

综上，$k\leqslant -\dfrac{1}{2}$.

祝学业有成!

5月31日上午

1. D 【解析】因为直线 $2x+y=3$ 过点 (a,b)，所以 $2a+b=3$，而 $16^a+4^b\geqslant 2\sqrt{16^a\cdot 4^b}=2\sqrt{2^{4a+2b}}=2\sqrt{2^6}=16$，当且仅当 $a=\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$ 时，16^a+4^b 有最小值 16.

2. B 【解析】由题可知 $\{a_n\}$ 为等比数列，设首项为 a_1，公比为 q，则 $a_4=a_1q^3$，$a_7=a_1q^6$，所以 $8a_1q^3=a_1q^6$，解得 $q=2$. 又 a_1，a_2+1，a_3 成等差数列，所以 $a_1+a_3=2(a_2+1)$，所以 $a_1+4a_1=2(2a_1+1)$，解得 $a_1=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，故 $a_n=2^n$. 由 $b_{n+1}=a_n+b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，得 $b_{n+1}-b_n=2^n$. 可得 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=b_1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=1+\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=2^n-1(n\geqslant 2)$. 当 $n=1$ 时也满足，所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

3. D 【解析】将 $y=\sqrt{3}b$ 代入双曲线 C 的标准方程，得 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{3b^2}{b^2}=1$，所以 $x=\pm 2a$，故 $A(-2a,\sqrt{3}b)$，$B(2a,\sqrt{3}b)$. 又因为 $F(c,0)$，所以$\overrightarrow{AF}=(c+2a,-\sqrt{3}b)$，$\overrightarrow{BF}=(c-2a,-\sqrt{3}b)$. 因为$\angle AFB=90°$，所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，于是有 $c^2-4a^2+3b^2=0$，即 $4c^2-7a^2=0$，所以 $e^2=\frac{7}{4}$，故 $e=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

4. $\frac{10}{3}\pi$ 【解析】由三视图可知该几何体是$\frac{1}{4}$个圆柱和$\frac{1}{2}$个圆锥的组合体，所以其体积为$\frac{1}{4}\times\pi\times 2^2\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 2=\frac{10}{3}\pi$.

5. 8 【解析】$\because y=(\frac{1}{3})^x$ 和 $y=-\log_2(x+4)$都是在区间$[-2,2]$上的减函数，$\therefore f(x)=(\frac{1}{3})^x-\log_2(x+4)$在区间$[-2,2]$上是减函数，$\therefore$函数 $f(x)$在区间$[-2,2]$上的最大值为 $f(-2)=8$.

6.【解析】(Ⅰ)由 $3\sin A=5\sin C$，得 $3a=5c$. 又因为 $2a=b+c$，

所以 $a=\frac{5}{3}c$，$b=\frac{7}{3}c$，

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(\frac{5}{3}c)^2+c^2-(\frac{7}{3}c)^2}{2\times\frac{5}{3}c\times c}=-\frac{1}{2}$，

由于 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$.

(Ⅱ)由$\begin{cases}b=7\\3a=5c\\2a=b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5,\\c=3,\end{cases}$

又$|\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，

则$|BD|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})=\frac{1}{4}\times[9+25+2\times3\times5\times(-\frac{1}{2})]=\frac{19}{4}$，

$\therefore|\overrightarrow{BD}|=\frac{\sqrt{19}}{2}$，$\therefore$线段 BD 的长为$\frac{\sqrt{19}}{2}$.

7.【解析】(Ⅰ)$\because\triangle F_1AB$ 的周长为$|AF_1|+|BF_1|+|AB|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a=8$，$\therefore a=2$，

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\therefore c=1$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(Ⅱ)设 A，B 两点坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

ⅰ)当直线 AB 与 y 轴重合，A 点与上顶点重合时，$\lambda=\frac{|PA|}{|PB|}=2+\sqrt{3}$，

当直线 AB 与 y 轴重合，A 点与下顶点重合时，$\lambda=\frac{|PA|}{|PB|}=2-\sqrt{3}$，

ⅱ）当直线 AB 斜率为 0 时，$\lambda=\frac{|PA|}{|PB|}=1$，

ⅲ）当直线 AB 斜率存在且不为 0 时，设直线 AB 方程为 $y=kx-1$，

联立 $3x^2+4y^2=12$，得 $(3+4k^2)x^2-8kx-8=0$，

则有 $x_1+x_2=\frac{8k}{3+4k^2}$①，

$x_1\cdot x_2=-\frac{8}{3+4k^2}$②，

又 $\lambda=\frac{|PA|}{|PB|}=-\frac{x_1}{x_2}$，则 $x_1=-\lambda x_2$，代入①②得

$x_2-\lambda x_2=\frac{8k}{3+4k^2}$③，

$-\lambda x_2^2=-\frac{8}{3+4k^2}$④，

$\therefore \frac{\lambda x_2^2}{x_2^2(1-\lambda)^2}=\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}=\frac{\frac{8}{3+4k^2}}{(\frac{8k}{3+4k^2})^2}=\frac{3+4k^2}{8k^2}=\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{3}{4k^2})>\frac{1}{2}$，

即 $\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}>\frac{1}{2}$，解得 $2-\sqrt{3}<\lambda<2+\sqrt{3}$，

综上，$\lambda\in[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$.

5月31日下午

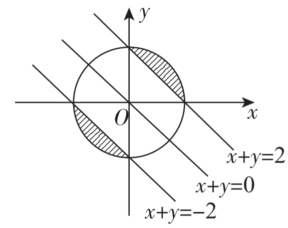
1. D 【解析】$\because A+B=2C$，$\therefore 3C=\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$，于是 $\frac{\sin A}{1}=\frac{\sin C}{\sqrt{3}}$，$\therefore \sin A=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，由于 $a<c$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$，于是 $B=\frac{\pi}{2}$，故 $\sin B=1$.

2. C 【解析】令 $x=1$，则 $(a-1)^6(1+1)^2=0$，$\therefore a=1$，由 $(x-\frac{1}{x})^6$ 的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(-\frac{1}{x})^r=C_6^r x^{6-2r}(-1)^r$，由 $6-2r=4$，得 $r=1$，系数是 $2C_6^1(-1)^1=-12$.

3. B 【解析】由于 A_1 是 OF 的中点，所以有 $c=2a$，故双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=2$. 于是 $\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=2$，得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\y^2=2px\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{2p}{3},\\y=\frac{2\sqrt{3}p}{3},\end{cases}$ 于是 $\triangle OMN$ 的面积 $2\times\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}p}{3}\times\frac{2p}{3}=4\sqrt{3}$，解得 $p^2=9$，所以 $p=3$（$p=-3$ 舍去），则抛物线 K 的方程为 $y^2=6x$.

4.$n\geqslant7$? 或 $n>6$? 【解析】根据框图,$n=1,S=1,n=2,S=1+1,n=3,S=1+1+1,n=4,S=1+1+1+2,n=5,S=1+1+1+2+2,n=6,S=1+1+1+2+2+3,n=7,S=1+1+1+2+2+3+3=13$,满足条件,输出 $S=13$,故判断框内可以填 $n\geqslant7$? 或 $n>6$?.

5.$\frac{\pi-2}{2\pi}$ 【解析】从圆 $x^2+y^2=4$ 内任取一点 P,则 P 到直线 $x+y=0$ 的距离不小于$\sqrt{2}$的区域在如图所示的阴影区域,因此所求概率为 $\frac{2\times(\frac{1}{4}\pi\times2^2-\frac{1}{2}\times2\times2)}{\pi\times2^2}=\frac{\pi-2}{2\pi}$.



6.【解析】(Ⅰ)因为 $AC\perp BC,AC\perp BC_1,BC\cap BC_1=B$,

所以 $AC\perp$平面 BB_1C_1C,又因为 $AC\subset$平面 ABC,

所以平面 $ABC\perp$平面 BB_1C_1C.

(Ⅱ)在平面 BB_1C_1C 内作 $B_1D\perp BC$,垂足为 D,因为平面 $ABC\cap$平面 $BB_1C_1C=BC$,且平面 $ABC\perp$平面 BB_1C_1C,

所以 $B_1D\perp$平面 ABC,

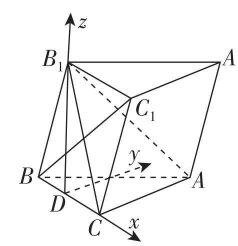
因为 $AC\perp BC_1,AB_1\perp BC_1$,所以 $BC_1\perp$平面 AB_1C,

所以 $BC_1\perp B_1C$,故平行四边形 BB_1C_1C 是菱形,又$\angle B_1BC=60^\circ$,

从而 $BD=\frac{1}{2}BB_1=\frac{1}{2}BC$,于是 D 是 BC 中点,

设 $BC=2$,以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DC}$为 x 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,则 $A(1,2,0),B(-1,0,0),C(1,0,0),B_1(0,0,\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{AC}=(0,-2,0),\overrightarrow{AB_1}=(-1,-2,\sqrt{3}),\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=(1,0,\sqrt{3})$.



设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$是平面 CAB_1 的一个法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x_1-2y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\-2y_1=0,\end{cases}$

可以取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$是平面 A_1AB_1 的一个法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x_2-2y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\x_2+\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$

可以取 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$.

因为 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$,二面角 $C-AB_1-A_1$ 的平面角是钝角,

故二面角 $C-AB_1-A_1$ 的余弦值是$-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

7.【解析】(Ⅰ)由 $m=-6$ 得,$f(x)=x^3-6x^2-36x$,

则 $f'(x)=3x^2-12x-36$,令 $f'(x)=0$,

即 $x^2-4x-12=0$,解得 $x=-2$ 或 $x=6$,

当 $x<-2$ 或 $x>6$ 时,$f'(x)>0$;当$-2<x<6$ 时,$f'(x)<0$,

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-2)$上为增函数，在$(-2,6)$上为减函数，在$(6,+\infty)$上为增函数，

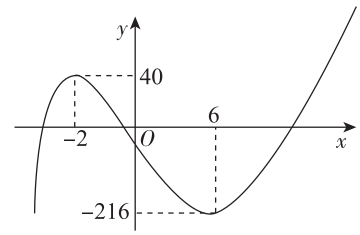
$\therefore f(x)$在$x=6$处取得极小值，故函数$f(x)$的极小值点为6.

(Ⅱ)若$m=-6$，由(Ⅰ)知$f(x)$在$(-\infty,-2)$上为增函数，在$(-2,6)$上为减函数，在$(6,+\infty)$上为增函数，

即当$x=-2$时有极大值，$y_{极大值}=f(-2)=40$；

当$x=6$时有极小值，$y_{极小值}=f(6)=-216$，

于是可得函数$y=f(x)$的大致图象如图所示，



而函数$y=f(x)-k$零点的个数，

即为函数$y=f(x)$图象与直线$y=k$的交点个数，

由函数$y=f(x)$的大致图象可知，要使函数$y=f(x)-k$恰有3个不同的零点，

则实数k的取值范围是$(-216,40)$.

(Ⅲ)由$g(x)=e^x(f(x)+34x+2)$，可知$g(x)=e^x(x^3+mx^2-2x+2)$，

所以$g'(x)=e^x(x^3+mx^2-2x+2)+e^x(3x^2+2mx-2)=xe^x[x^2+(m+3)x+2m-2]$，

$\because g(x)$在$[-2,-1]$上为增函数，$\therefore$当$x\in[-2,-1]$时，$g'(x)\geqslant 0$，

又$\because$当$x\in[-2,-1]$时，$xe^x<0$，$\therefore$当$x\in[-2,-1]$时，$x^2+(m+3)x+2m-2\leqslant 0$，

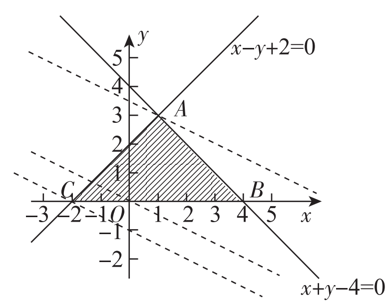
$\therefore\begin{cases}(-2)^2-2(m+3)+2m-2\leqslant 0,\\(-1)^2-(m+3)+2m-2\leqslant 0,\end{cases}$解得$m\leqslant 4$，

$\therefore$当$m\in(-\infty,4]$时，$g(x)$在$[-2,-1]$上为增函数.

祝学业有成!

6月2日上午

1. C 【解析】作出不等式组对应的平面区域如图，由$z=x+2y$可得$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}z$，平移$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}z$，由图象知当直线$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}z$经过点$A$时直线的截距最大，此时$z$最大；经过点$C$时直线的截距最小，此时$z$最小，由$\begin{cases}x-y+2=0\\x+y-4=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$即$A(1,3)$，则$a=1+2\times3=7$，而$C(-2,0)$，则$b=-2+2\times0=-2$，故$a+b=7-2=5$.



2. D 【解析】令$S=\log_2\dfrac{3}{1}+\log_2\dfrac{4}{2}+\log_2\dfrac{5}{3}+\cdots+\log_2\dfrac{m+1}{m-1}=\log_2(\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{3}\times\cdots\times\dfrac{m}{m-2}\times\dfrac{m+1}{m-1})=\log_2\dfrac{m(m+1)}{2}$，令$2^{\log_2\frac{m(m+1)}{2}}=\dfrac{m(m+1)}{2}=55$，解得$m=10$.

3. A 【解析】$f'(x)=e^x-b$的值可正可负，$\therefore b>0$. 由$f(x_1)=f(x_2)=0$，得$e^{x_1}=bx_1$，$e^{x_2}=bx_2$，$\therefore e^{x_1-x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}$，$\therefore x_1-x_2=\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，所以$x_1+x_2=(x_1+x_2)\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，不妨设$x_1>x_2$，令$\dfrac{x_1}{x_2}=t(t>$

1)，则 $x_1+x_2=\frac{t+1}{t-1}\ln t>a$，即 $\ln t-\frac{a(t-1)}{t+1}>0$，令 $g(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$，$g(1)=0$，(ⅰ)当 $a\leqslant 2$，$x\in(1,+\infty)$时，$x^2+2(1-a)x+1\geqslant x^2-2x+1>0$，故 $g'(x)>0$，$g(x)$在 $x\in(1,+\infty)$上单调递增，因此 $g(x)>0$；(ⅱ)当 $a>2$ 时，令 $g'(x)=0$ 的根为 p,q，$p=a-1-\sqrt{(a-1)^2-1}$，$q=a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}$，由 $q>1$ 和 $pq=1$ 得 $p<1$，故当 $x\in(1,q)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在 $x\in(1,q)$上单调递减，因此 $g(x)<0$. 综上，a 的取值范围是$(-\infty,2]$.

4. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=0$，即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle-|\boldsymbol{b}|^2=0$. ∵ $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，∴ $2|\boldsymbol{b}|^2\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle-|\boldsymbol{b}|^2=0$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$，故 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

5. $4\sqrt{3}$ 【解析】设 $AC=a$，$CC_1=b$，因为$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0$，所以$\triangle BC_1D$ 为直角三角形，而 $BD^2=DC_1^2=a^2+\frac{1}{4}b^2$，∴$(a^2+\frac{1}{4}b^2)\times 2=a^2+b^2$，得 $b^2=2a^2$，又$\frac{1}{2}\times(a^2+\frac{1}{4}b^2)=6$，∴$a=2\sqrt{2}$，$b=4$，而点 B 到 AC 的距离即为四棱锥 $B-ACC_1D$ 的高 h，又 $h=\sqrt{a^2-(\frac{a}{2})^2}=\sqrt{8-\frac{8}{4}}=\sqrt{6}$，所以四棱锥 $B-ACC_1D$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times h\times S_{ACC_1D}=\frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{3}$.

6.【解析】(Ⅰ)∵ $H_n=1-a_n$，∴ $H_1=1-H_1$，∴ $H_1=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{1}{H_1}=2$，

由题意可得：$H_n=1-\frac{H_n}{H_{n-1}}\Rightarrow H_n\cdot H_{n-1}=H_{n-1}-H_n(n\geqslant 2)$，

∴ $\frac{1}{H_n}-\frac{1}{H_{n-1}}=1$，

∴数列$\{\frac{1}{H_n}\}$是首项为 2，公差为 1 的等差数列.

(Ⅱ)∵数列$\{\frac{1}{H_n}\}$为等差数列，其首项为 2，公差为 1，

∴ $\frac{1}{H_n}=n+1$，即 $H_n=\frac{1}{n+1}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{H_n}{H_{n-1}}=\frac{n}{n+1}$($a_1=\frac{1}{2}$也满足此式).

于是数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\frac{n}{n+1}$.

(Ⅲ)由(Ⅱ)知 $b_n=(1-a_n)(1-a_{n+1})=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$，

∴ $S_n=\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}$，即证 $S_n<\frac{1}{2}$.

7.【解析】(Ⅰ)当 $a=1$ 时,$f(x)=2|x+2|+|x-1|=\begin{cases}3x+3, x\geqslant 1,\\ x+5, -2<x<1,\\ -3x-3, x\leqslant -2,\end{cases}$

由 $f(x)\leqslant 6$,得 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ 3x+3\leqslant 6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2<x<1\\ x+5\leqslant 6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant -2,\\ -3x-3\leqslant 6,\end{cases}$

解得 $x=1$ 或 $-2<x<1$ 或 $-3\leqslant x\leqslant -2$,

∴不等式的解集为 $\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$.

(Ⅱ)∵ $f(x)=2|x+2|+|x-a|=\begin{cases}3x+4-a, x\geqslant a,\\ x+4+a, -2<x<a,\\ -3x-4+a, x\leqslant -2,\end{cases}$

由 $f(x)$ 的表达式及一次函数的单调性可知,

$f(x)$ 在 $x=-2$ 时取得最小值,$f(x)_{\min}=f(-2)=2+a$,

若 $f(x)\geqslant 4$ 恒成立,只需 $2+a\geqslant 4$,即 $a\geqslant 2$,

所以实数 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

6月2日下午

1. B 【解析】由奇偶性的定义,$f(-x)=\dfrac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}}\cdot\sin[\cos(-x)]=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^x}}{1+\dfrac{1}{2^x}}\cdot\sin[\cos(-x)]=-\dfrac{1-2^x}{1+2^x}\cdot\sin(\cos x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,排除 A;$f(0)=0$,排除 D;$f(\dfrac{\pi}{2})=0$;排除 C;答案为 B.

2. B 【解析】由题设知,$OQ=QT=t(t>1)$,$O_1T=1$,且 $\mathrm{Rt}\triangle POQ\backsim\mathrm{Rt}\triangle PTO_1$,所以 $\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{TP}{TO_1}$,即 $\dfrac{OP}{t}=\dfrac{\sqrt{t^2+OP^2}-t}{1}$,化简得 $OP=\dfrac{2t^2}{t^2-1}(t>1)$,所以 $\mathrm{Rt}\triangle OPQ$ 的面积为 $S(t)=\dfrac{1}{2}OQ\cdot OP=\dfrac{1}{2}t\cdot\dfrac{2t^2}{t^2-1}=\dfrac{t^3}{t^2-1}(t>1)$,$S'(t)=\dfrac{3t^2(t^2-1)-t^3\cdot 2t}{(t^2-1)^2}=\dfrac{t^2(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})}{(t^2-1)^2}(t>1)$,由 $S'(t)=0(t>1)$,得 $t=\sqrt{3}$. 列表:

t	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	↘	极小值	↗

画出 $S(t)$ 和 $y=at-4a$ 的图象可得,$\begin{cases}S(2)<a(2-4),\\ S(3)\geqslant a(3-4),\end{cases}$ ∴ $-\dfrac{27}{8}\leqslant a<-\dfrac{4}{3}$.

3. C 【解析】∵函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+7, x\leqslant 1\\ -\dfrac{a}{x}, x>1\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,设 $g(x)=x^2+ax+7(x\leqslant 1)$,

$h(x)=-\frac{a}{x}(x>1)$,由分段函数的性质可知,函数 $g(x)=x^2+ax+7$ 在$(-\infty,1]$上单调递减,函数 $h(x)=-\frac{a}{x}$在$(1,+\infty)$上单调递减,且 $g(1)\geqslant h(1)$,∴$\begin{cases}-\frac{a}{2}\geqslant 1,\\ a<0,\\ a+8\geqslant -a,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}a\leqslant -2,\\ a<0,\\ a\geqslant -4,\end{cases}$ 解得$-4\leqslant a\leqslant -2$.

4.3 【解析】焦点到渐近线的距离即为 b,所以 $b=\sqrt{2}$.由$\begin{cases}c^2=a^2+b^2\\ \frac{c}{a}=3\end{cases}$得,$c=\frac{3}{2}$,所以焦距为 3.

5.$\frac{4036}{2019}$【解析】由于对任意的正整数 m,n,都有 $a_{m+n}=a_m+a_n+mn$,取 $m=1$,代入可得 $a_{n+1}=a_n+1+n$,$a_{n+1}-a_n=1+n$,那么根据累加法可知,$a_2-a_1=2$,$a_3-a_2=3$,$\cdots$,$a_n-a_{n-1}=n$,所以 $a_n-a_1=2+3+\cdots+n=\frac{(2+n)(n-1)}{2}$,所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,所以$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$,所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}=2\times(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2\times(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$,所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2017}}+\frac{1}{a_{2018}}=\frac{2\times 2018}{2019}=\frac{4036}{2019}$.

6.【解析】(Ⅰ)证明:∵$PA\perp$底面 $ABCD$,∴$PA\perp AD$,

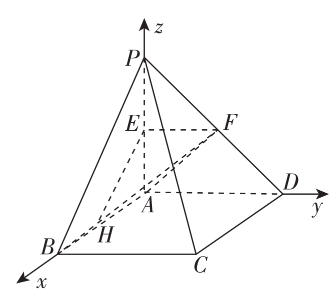
而底面 $ABCD$ 为正方形,∴$AD\perp AB$,

又 E,F 分别是线段 PA,PD 的中点,∴$EF/\!/AD$,∴$EF\perp PA$,$EF\perp AB$,

又∵$PA\cap AB=A$,

所以 $EF\perp$平面 PAB.

(Ⅱ)以 AB,AD,AP 分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,



则 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,2,0)$,$P(0,0,2)$,

$E(0,0,1)$,$F(0,1,1)$,$H(1,0,0)$,

$\overrightarrow{EH}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{EF}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,

$\overrightarrow{AH}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$,

∵$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AF}=0\times 0+2\times 1+(-2)\times 1=0$,

$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AH}=0\times 1+2\times 0+(-2)\times 0=0$,

∴$PD\perp AF$,$PD\perp AH$.

又∵$AF\cap AH=A$,∴$PD\perp$平面 AHF,

即$\overrightarrow{PD}$为平面 AHF 的一个法向量,而$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.

设平面 EFH 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EH}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y=0,\\ x-z=0,\end{cases}$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(-1,0,-1)$.

若二面角 $E-FH-A$ 的平面角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PD}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,

所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，即二面角 $E-FH-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

7.【解析】(Ⅰ)根据题意，$f'(x)=-\frac{1}{x-1}$，所以 $f'(0)=1$，所以切线 l 的方程为 $y=x$.

设 $P(x,y)$ 为 $g(x)$ 图象上任一点，则点 (y,x) 为 $f(x)$ 图象上一点，

则 $x=-\ln(1-y)$，$\therefore y=1-e^{-x}$，所以 $g(x)=1-e^{-x}$.

(Ⅱ)由于 $x\geqslant 0$ 时，$0\leqslant 1-e^{-x}\leqslant\frac{x}{ax+1}$ 恒成立，故 $a\geqslant 0$.

设 $h(x)=\frac{x}{ax+1}+e^{-x}-1$，$x\in[0,+\infty)$，$h(x)\geqslant 0$ 恒成立，

则 $h'(x)=\frac{ax+1-ax}{(ax+1)^2}-e^{-x}=\frac{1}{(ax+1)^2}-e^{-x}=\frac{e^{-x}}{(ax+1)^2}[e^x-(ax+1)^2]$.

设 $k(x)=e^x-(ax+1)^2$，$x\in[0,+\infty)$，

则 $k'(x)=e^x-2a(ax+1)=e^x-2a^2x-2a$，$k'(0)=1-2a$，

ⅰ)当 $1-2a\geqslant 0$，即 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$k''(x)=e^x-2a^2$，$x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant 1$，$2a^2\leqslant\frac{1}{2}$，故 $k''(x)\geqslant 0$.

所以 $k'(x)$ 单调递增，$k'(x)\geqslant k'(0)=1-2a\geqslant 0$，

故 $k(x)$ 单调递增，$k(x)\geqslant k(0)=0$ 恒成立，符合题意.

ⅱ)当 $1-2a<0$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，存在 $\delta>0$，$x\in(0,\delta)$ 时，$k'(x)<0$，$k(x)$ 单调递减，$k(x)<k(0)=0$，在 $(0,\delta)$ 上，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$h(x)<h(0)=0$，这与 $h(x)\geqslant 0$ 恒成立矛盾.

综合上述，实数 a 的取值范围是 $[0,\frac{1}{2}]$.

祝学业有成！